ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) Федеральный Университет»
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Учебное пособие. IV-VII семестры

Курс лекций для студентов и магистрантов педагогического отделения Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского проф. Ю.Г. Игнатьева и Р.Ф. Мифтахова

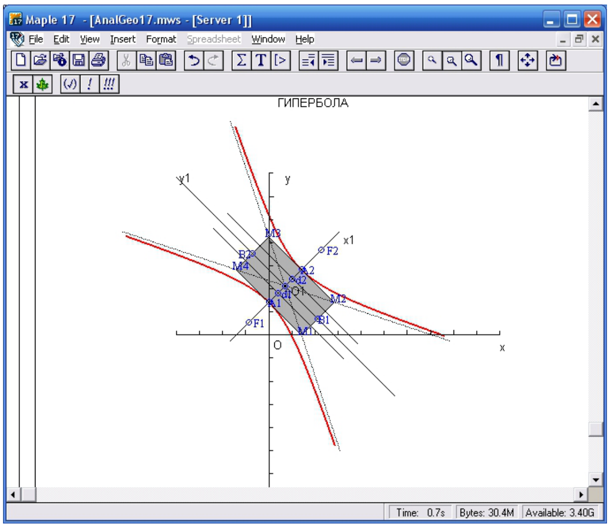
(Специальности: математика и информатика, математика и английский язык, магистратура)

Большое количество примеров по всем разделам!
Примеры решения задач в пакете Maple

Большое количество конкретных примеров!

По просьбе студентов издание дополнено рядом примеров, выполненных с применением системы компьютерной математики Maple!

Лаборатория НИЛИТМО КФУ



Казанский университет
2015

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Печатается по Ученого Совета Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

УДК 513 **Игнатьев Ю.Г., Мифтахов Р.Ф. Информационные технологии в математическом образовании. Учебное пособие. IV-VII семестры. Курс лекций для студентов и магистрантов педагогического отделения Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского. - Казань: Казанский университет, 2015, - 264 с.**

Курс лекций посвящен новой дисциплине - информационным технологиям в математическом образовании. В нем рассмотрена система компьютерной математики (СКМ – CAS) «Maple», а также пакет издательских программ «LaTeX-2ϵ». Рассмотрение пакетов символьной математики базируется на пакете «Maple 8–18».

Курс лекций сопровождается большим количеством примеров. Даны примеры заданий для самостоятельной работы. Пособие адресовано будущим учителям, которые в дальней профессиональной деятельности будут использовать информационные технологии.

Материалы пособия предназначены для студентов математических факультетов педагогических отделений по специальностям «Математика», «Математика и иностранный язык», «Информационные технологии в физико - математическом образовании».

Рецензент: **Сушков С.В.,** д-р. физ.-мат. наук, проф., (КФУ).

Оглавление

Глава I

Введение: необходимость внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования

[1]Существует ряд весьма веских причин необходимости внедрения информационных технологий в структуру физико - математического образования. Эти причины, в основном, имеют внешний по отношению к физико-математическому образованию характер и вызваны глобальными изменениями в структуре общества, общественного сознания и интенсивным процессом информатизации общества. Среди этих причин:

1. непрерывно и быстро растущие потоки информации и быстрое ее устаревание;
2. сокращение учебных часов на изучение фундаментальных дисциплин с одновременным расширением изучаемых разделов;
3. перенос центра тяжести учебного процесса на самостоятельную работу студентов и учащихся;
4. недостаточное финансирование фундаментальных направлений науки и соответствующих им направлений высшего образования;
5. интеграция различных областей знаний и появление новых направлений науки и технологий;
6. увеличение числа специальностей при одновременном уменьшении числа студентов;
7. снижение интереса молодежи к наукоемким специальностям физико-математического профиля, овладение которыми требует больших затрат, а ожидаемый карьерный рост не дает больших надежд на будущее.
8. падение уровня математической подготовки абитуриентов, в том числе, в результате действия предшествующего фактора.

[1]Материал введения взят из лекции Ю.Г. Игнатьева и А.Р. Самигуллиной для слушателей щколы по математатическому и компьютерному моделированию [1].

9. увеличение доли масс - медийных, зрительных потоков информации (TV, Интернет, видеоигры и т.п.), что приводит к разрушению аналитической и абстрактной форм мышления, необходимых для математического образования.

Но помимо этих причин, на наш взгляд, существуют и внутренние причины именно российского математического образования, приводящие в последнее время к его застою и низкой эффективности. Среди этих причин:

1. формализованный характер математического образования;

2. утрата связей математического образования с современными задачами, как прикладных, так и фундаментальных наук;

3. перегруженность математических курсов абстрактным теоретическим материалом в ущерб решению конкретных задач, исторически являющихся целевыми для данных курсов;

4. оторванность математических курсов от современных компьютерных технологий.

Аналогичные проблемы свойственны и многим современным российским научным математическим школам. Известны, например, потребности многих областей, как фундаментальных, так и прикладных наук, в создании методов исследования нелинейных континуальных систем, описываемых нелинейными дифференциальными и интегро - дифференциальными уравнениями в частных производных. Однако, подавляющее большинство кандидатских и докторских диссертаций по этой специальности посвящено методам решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений, причем зачастую исследования завершаются доказательством существования и единственности решения.

Аналогичные проблемы существуют и в других странах, традиционно ориентирующихся на наукоемкие формы человеческой деятельности и в последнее время создающие предпосылки для стагнации прогрессивного развития человечества. Поэтому, несмотря на то, что в данной статье мы опираемся, в основном, на исследования и опыт Российских ученых, изложенные ниже результаты, как мы думаем, будут полезны и математикам других стран, работающих в системе высшего образования.

I.1 Основная идея внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования

Следует отметить, что особенности информатизации математического образования на основе современных информационных технологий до сих пор слабо освещены в научной литературе. В частности, не существует единой концепции внедрения информационных технологий в структуру математического образования, а также достаточно разработанных методик преподавания математических дисциплин с помощью информационных технологий с учетом специфике этих дисциплин. Существующие методики слабо связаны со спецификой физико-математических дисциплин, позволяющих реализовать более глубокое проникновение информационных технологий в самую суть этих предметов и тем самым существенно переориентировать учебный процесс и сделать его более эффективным.

На наш взгляд, преодолеть указанные противоречия между запросами современных науки и технологии, с одной стороны, и потенциалом математического образования, с другой стороны, возможно на пути интенсивного применения методов математического и компьютерного моделирования при изучении всех базовых курсов математики с последующим интегрированием целевых задач этих курсов с задачами фундаментальных и прикладных наук. При этом компьютерное моделирование следует осуществлять в среде систем компьютерной математики (СКМ), а соответствующие курсы формировать, как исследовательские, направленные на построение математических и компьютерных моделей, в ходе создания которых студенты будут овладевать необходимыми фундаментальными знаниями предметов и учиться их практическому применению. Следует обратить внимание на тот факт, что построение математической модели и её компьютерная реализация воспитывают строгость математического мышления, его культуру и технологичность. Построение и исследование компьютерной модели, кроме всего прочего, воспитывает трудолюбие, аккуратность и добросовестность – качества, которых так не хватает постсоветским генерациям молодежи. Кроме всего прочего, этот путь является наиболее эффективным способом вовлечения молодежи в современную науку и инженерию.

Один из создателей научного направления математического моделирования, академик А.А. Самарский [21], определил математическую модель как эквивалент объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства и ввел понятие *триады математического моделирования* См.Рис.Рис.I.1: модель → алгоритм → программа, как необходимый план действий изучения объекта. При этом на первом этапе строится математический образ объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства, т.е., *математическая модель*.

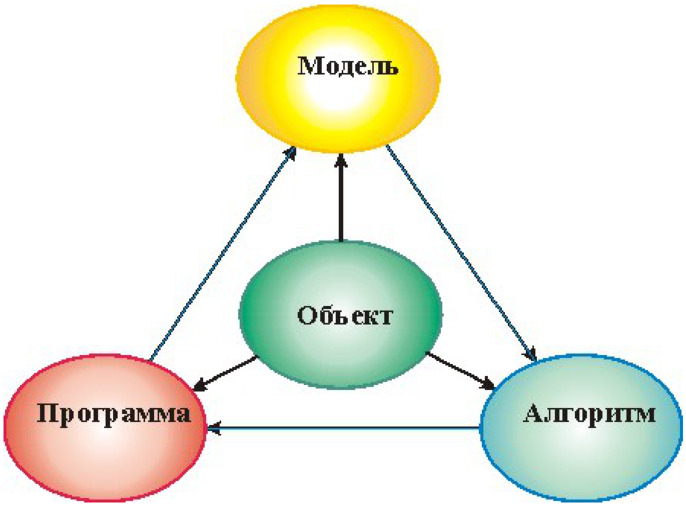


Рис.I.1. *Триада математического моделирования по Самарскому*

Далее математическая модель исследуется теоретическими методами, что позволяет получить *общие предварительные* знания об объекте. На втором этапе разрабатывается *алгоритм* для реализации модели на компьютере. На этом этапе модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, и определяется последовательность вычислительных и логических операций для изучения исследуемых свойств объекта. На третьем этапе *программирования* создаются программы, переводящие модель и алгоритм на язык программы. Создав указанную триаду математического моделирования, исследователь проводит *численные эксперименты*, сравнивая результаты которых с результатами натурных экспериментов, он вносит необходимые коррективы в математическую модель. Проводя, таким образом, доводку математической модели до совершенства, исследователь получает тем самым адекватную объекту математическую модель. Отметим, что сам процесс построения математической модели адекватно отображает сам процесс познания человеком окружающего мира, поэтому идеально подходит для построения на его основе модели информатизации математического образования. На наш взгляд, эта триада математического моделирования и должна быть положена в основу математического образования.

Требование информатизации математического образования приводит к необходимости глубокого внедрения информационных технологий на основе математического и компьютерного моделирования в среде компьютерной математики в саму структуру математических дисциплин, что, в свою очередь, приводит к необходимости разработки методик интегрированного изучения физико-математических дисциплин на основе математического и компьютерного моделирования в среде компьютерной математики, что, в свою очередь, как раз *изменяет парадигму физико-математического образования.*

Возникает вопрос о третьем этапе процесса математического моделирования – реализации математической модели компьютерными средствами, т.е., о компьютерном моделировании. Как показано в ряде исследований [3],[6],[8],[9],[17],[18],[19],[20],[21],[22] и др., для этих целей идеально подходят прикладные математические пакеты. Специфика применения компьютерных математических пакетов в системе математического образования довольно широко раскрыта в этих исследованиях. Однако, в указанных работах прикладные математические пакеты рассматривались как дополнительное средство интенсификации учебного процесса и придания большей наглядности изучаемым математическим структурам[2]. Таким образом, подводя итоги, можно сказать, что *основной идеей внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования является компьютерное моделирование в системах компьютерной алгебры.* Следует отметить, что, в принципе, эта идея не является совершенно новой: в той или иной степени она была высказана неявно и частично реализована в работах многих авторов[3] – в нашей работе мы, во-первых, явно формулируем эту идею, во-вторых, описываем механизм ее реализации, в-третьих, наполняем этот механизм конкретными необходимыми деталями.

I.2 Выбор системы компьютерной алгебры для реализации идеи

Многочисленные исследования, проведенные различными авторами (см., например, [13],[3] и др.) показывают, что среди известных систем компьютерной математики Maple является наиболее приемлемой для физико-математического образования СКМ, как по стоимости, так и по простоте интерфейса, а также соответствию языка программирования стандартному математическому языку. В частности, в монографии[3], посвященной сравнительному аспекту CAS Maple и Mathematica, отмечается следующее обстоятельство «CAS Maple, поддерживая довольно развитый процедурный язык программирования,

[2]Об этом, кстати, пишут и канадские исследователи [4].

[3]Следует отметить также русскоязычные сайты, посвященные применению CAS в системе физико-математического образования: www.exponenta.ru и vuz.exponenta.ru .

наилучшим образом отвечает задачам образовательного характера и, в частности, совершенствования преподавания математически–ориентированных дисциплин для университетов, освоения систем компьютерной математики, а также применения в задачах автоматизации аналитических и численных преобразований, и вычислений в относительно несложных научно–технических проектах... Maple оказался более простым в освоении, прежде всего тем, что его язык синтаксически более близок к известным императивным языкам программирования, в частности, к Pascal. А как известно, в общем случае императивные языки несколько проще в освоении». Преимущества CAS Maple перед другими системами компьютерной алгебры в решении задач физико-математического образования перечислены и в монографии [17], посвященной применению CAS Maple в задачах компьютерного моделирования фундаментальных объектов и явлений, изучаемых в математических и физических курсов университетов. Одним из важных для системы образования достоинств CAS Maple является превосходное качество трехмерной динамической графики, особенно проявившееся в последних версиях Maple 17-18[4], а также простые средства создания авторских библиотек процедур. Все эти качества, вместе взятые, несомненно, выдвигают CAS Maple на лидирующую позицию в системе физико-математического образования.

I.3 Идеология внедрения

Для внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования необходимо решить следующие научно- методические задачи:

1. Создать информационное обеспечение учебного процесса:
   (a) создать электронные учебники;
   (b) создать генераторы индивидуальных заданий;
   (c) создать автоматизированную систему проверки индивидуальных заданий;
   (d) создать электронные библиотеки.
2. Создать демонстрационное сопровождение лекций и практических занятий:
   (a) создать интерактивные 3D иллюстрации геометрических и физических объектов;
   (b) создать интерактивные видеоматериалы, сопровождающие вычисления;
   (c) создать анимационные математические модели объектов и явлений.
3. Встроить компьютерные вычисления в структуру практических занятий:
   (a) создать классы для комплексных учебных занятий с применением компьютеров по всем физико-математическим предметам;
   (b) встроить параллельное сопровождение практических занятий студентов компьютерными вычислениями;
   (c) создать программы аналитического тестирования и самотестирования учащихся.

[4]это обстоятельство отмечает и известный специалист в CAS,[7].

4. Встроить компьютерные вычисления в структуру спецкурсов, курсовых и выпускных квалификационных работ:
   (a) сделать построение компьютерных математических моделей учащимися основой специальных курсов;
   (b) сделать создание учащимися авторских программных и научных продуктов, а также интерактивных учебных пособий обязательным элементом выпускных квалификационных работ.

Представленная на рис.Рис.I.2 схема учебного процесса предполагает решение следующих учебно - научных задач:

1. (a) создание компьютерных моделей изучаемых явлений, привлечение информационных технологий в процесс преподавания предмета;
   (b) создание интерактивных учебных пособий и систем аналитического тестирования;
   (c) привлечение методов символьной математики для описания сложных явлений;
   (d) замена академического метода преподавания интерактивным с использованием информационных технологий;
   (e) использование компьютерных технологий для переориентации интересов молодежи к научному творчеству;

Рис.I.2. *Организация учебного процесса по физико-математическим дисциплинам на основе CAS*

I.4 Методическое и программное обеспечение внедрения информационных технологий в структуру физико - математического образования

Организация вышеуказанного учебного цикла с глубоким использованием информационных технологий на основе СКМ требует больших наукоемких вложений, как на стадии запуска учебного процесса, так и на всех его дальнейших стадиях. Уже на первых стадиях учебного процесса требуется наличие большого количества заранее разработанных компьютерных моделей изучаемых объектов, как для лекционных демонстраций, так и для семинарских и самостоятельных занятий студентов. Разрабатываемые для обеспечения учебного процесса компьютерные модели должны удовлетворять ряду обязательных требований:

1. они должны быть наглядными;
2. они должны отображать все основные свойства исследуемой модели;
3. они должны быть интерактивными, т.е., позволять пользователю манипулировать ими с помощью внешних устройств;
4. они должны быть многопараметрическими для обеспечения возможности проведения численных экспериментов.

Проблема обеспечения наглядности математических структур играет важную роль в высшем образовании, так как усвоение фундаментальных геометрических понятий подготавливает фундамент для понимания процесса математического моделирования и овладения методами компьютерного моделирования, что в свою очередь, создает предпосылки для инновационного развития современного образования. Заметим, что многопараметричность создаваемых компьютерных моделей является важнейшим фактором, позволяющим управлять математической моделью, т.е., проводить компьютерное моделирование. В связи с этим важную роль играет компьютерная визуализация математических моделей, а особенно, *оснащенная динамическая визуализация*, основные принципы которой разработаны в работах [11], [13], [17]. Создание таких сложных компьютерных моделей возможно в формате независимых пакетов программ (библиотек программ), которые могут использованы, как преподавателями, так и студентами вызовом соответствующих библиотек и содержащихся в них многопараметрических команд, имеющих простой синтаксис (см., например, [12], [14],[15]). Необходимо подчеркнуть, что увеличение степени наглядности и интерактивности учебных материалов, созданных средствами ИТ, требует вложения больших интеллектуальных затрат и высокой степени профессионализма преподавателей, создающих такие программы. Отметим, что версии Maple 17–18 содержат в библиотеке Student специальные интерактивные программные процедуры Tutor, выводящие результаты в окна Maplet, на основе которых можно создавать демонстрационные и методические материалы. Но, конечно, использование этих процедур не достаточно для достаточно высокого уровня изучения высшей математики.

Решение проблемы компьютерной реализации объектов линейной алгебры и аналитической геометрии и создания наглядных геометрических образов (интерпретаций) объектов, структур и свойств предполагает решение трех основных задач:

1. построение математических моделей основных алгебраических структур, объектов и свойств;
2. построение их геометрических интерпретаций, т.е., сопоставление им геометрических моделей;
3. построение многопараметрических компьютерных моделей графических образов объектов.

Заметим, что многопараметричность создаваемых компьютерных моделей является важнейшим фактором компьютерных моделей, позволяющим управлять математической моделью, т.е., проводить компьютерное моделирование. Наиболее эффективное решение этих задач возможно в системах компьютерной математики (СКМ), среди которых для целей образования наиболее удобна система Maple. Основными достоинствами этой системы применительно к задачам образования являются: относительно невысокая стоимость (по сравнению с MatLab и Mathematica), дружественный и интерактивный интерфейс, великолепные графические возможности, в частности, интерактивная трехмерная графика и динамическая (анимация). В этой статье мы рассмотрим основные принципы математического и компьютерного моделирования объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в СКМ Maple. Заметим, что для рассмотренных здесь программных процедур конкретная версия Maple, начиная с версии 6, не имеет значения.

Необходимо подчеркнуть, что увеличение степени наглядности и интерактивности учебных материалов, созданных средствами ИТ, требует вложения больших интеллектуальных затрат и высокой степени профессионализма преподавателей. В первую очередь, сказанное касается предметов физико-математического цикла. Здесь центральной идеей создания высококачественных электронных учебных материалов является математическое моделирование изучаемых объектов и явлений. Создание математической модели изучаемого объекта во многом определяет наглядность и степень усваивания изучаемого материала. Поэтому основными образовательными требованиями к математической модели должны быть: ее многопараметричность, возможность графической трехмерной реализации, интерактивность, возможность построения анимационных (графических динамических) представлений. Системы компьютерной математики (СКМ), в первую очередь Maple, предоставляют уникальные программные и графические возможности для реализации этой идеи [5]. Однако, попытка прямого применения стандартных процедур СКМ далеко не всегда дает желаемый результат. Для получения качественных графических и анимационных моделей основных математических структур анализа функций приходится создавать пользовательские многопараметрические программные процедуры, простые для неискушенного в программировании пользователя, которые удобно объединять в специализированные библиотеки пользовательских процедур [7].

Глава II

Основные команды Maple

Система аналитических вычислений Maple является интерактивной системой. В данном случае это означает, что пользователь вводит команду или оператор языка Maple в области ввода рабочего листа и, нажав клавишу <Enter>, сразу передает ее аналитическому анализатору системы, который выполняет ее. Если команда введена правильна, то в области вывода появляется результат ее выполнения, если она содержит синтаксические ошибки или ошибки выполнения, система печатает сообщение об этом. Для исправления ошибки следует вернуться к оператору, откорректировать его и снова выполнить. После выполнения введенной команды система ожидает очередной команды от пользователя. В любой момент можно вернуться к любой команде или оператору на рабочем листе (Worksheet), подправить его и снова выполнить, причем, если на рабочем листе есть команда, использующая результат вновь вычисленной, то ее следует также снова вычислить, установив на ней курсор и нажав клавишу <Enter>, а если таких команд много, то можно выполнить команду графического интерфейса **Edit/Execute/Worksheet** для повторного вычисления всех команд рабочего листа.

Каждый оператор или команда должны *обязательно* завершаться *разделительным знаком* - точкой с запятой (;) или двоеточием (:). В первом случае команда вычисляется, и в области вывода отображается результат. Во втором случае команда выполняется, но результаты ее работы не отображаются в области вывода рабочего листа. Это удобно при программировании в Maple, когда нет необходимости в выводе каких-либо промежуточных результатов, получаемых из операторов цикла, так как вывод этих результатов может занять много места на рабочем листе, да и может потребоваться значительное количество времени на их отображение.

II.1 Объекты, переменные и выражения

Как и в любой интерактивной системе, в Maple реализован свой язык, с помощью которого происходит общение пользователя с системой. Базовыми понятиями являются объекты и переменные, из которых с помощью допустимых математических операций составляются выражения. Простейшими *объектами* являются числа, константы и строки.

Числа могут быть целыми, обыкновенными дробями, радикалами, числами с плавающей точкой и комплексными. Первые три типа чисел позволяют выполнять точные вычисления, без округлений, разнообразных математических выражений, реализуя точную арифметику, что отличает все системы аналитических вычислений, в том числе и Maple, от систем предлагающих численные решения математических задач, например, MathCad и Matlab. Числа с плавающей точкой являются приближенными, в которых число значащих цифр ограниченно. Эти числа служат для приближения, или аппроксимации, точных чисел Maple. Комплексные числа могут быть как точными, если действительная и мнимая часть представлены точными числами, так и приближенными, если при задании действительной и мнимой части числа используются числа с плавающей точкой. *Целые числа* задаются в виде последовательности цифр от 0 до 9. Отрицательные числа задаются со знаком минус (-) перед числом, нули перед первой ненулевой цифрой являются не значащими и не влияют на величину целого числа. Maple может работать с целыми числами произвольной величины, количество цифр практически ограниченно числом 2^{28}. Вычисления с целыми числами достаточно просты и реализуют четыре арифметических действия (сложение $+$, вычитание -, умножение *, деление/) и вычисление факториала (!) :

Пример III.1. *Операции с целыми числами*

```
> 44+6;
```

$$50$$

```
> 7-10;
```

$$-3$$

```
> 6*7;
```

$$42$$

```
> 45/5;
```

$$9$$

```
> 5!;
```

$$120$$

Кроме обычных арифметических действий над целыми числами, существует достаточно большой набор команд, позволяющих выполнить действия, специфичные при обработке целых чисел: разложение на простые множители (ifactor), вычисление частного (iquo) и остатка (irem) при выполнении операции целого деления, нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел (igcd), выполнение проверки, является ли целое число простым (isprime) и многое другое.

Пример III.2. *Команды для работы с целыми числами*

```
> ifactor(54);
```

$$(2)\ (3)^3$$

```
> iquo(45,7);
```

$$6$$

```
> irem(45,7);
```

$$3$$

```
> 7*%%+%;
```

$$45$$

```
> igcd(678,456);
```

$$6$$

```
> isprime(1377);
```

$$false$$

```
> isprime(137);
```

$$true$$

В этом примере для проверки вычисления частного и остатка двух целых чисел использованы операции получения результата выполнения предыдущей (вычисления частного) и предыдущей (вычисление остатка) команд. Результатом команды isprime() является булева константа true (истина) или false (ложь).

Обыкновенные дроби задаются с помощью операции деления двух *целых* чисел. Maple автоматически производит операцию сокращения дробей. Над обыкновенными дробями можно выполнять все основные арифметические операции.

Пример ПI.3. *Задание обыкновенных дробей и выполнение действий над ними*

```
> 64/24;
```

$$\frac{8}{3}$$

```
> 5/8+4/7;
```

$$\frac{67}{56}$$

```
> 2+9/5;
```

$$\frac{19}{5}$$

```
> 4+8/2;
```

$$8$$

Обратите внимание на последнее вычисление в примере. Если при задании дроби ее знаменатель сокращается, то такая дробь трактуется программой Maple как целое число.

Иногда представление результата в виде обыкновенной дроби не совсем удобно, и требуется преобразовать его в десятичную дробь. Это преобразование выполняет команда evalf(), которая аппроксимирует обыкновенную дробь числами с плавающей точкой, используя десять значащих цифр в мантиссе их представления. Если точность по умолчанию не достаточна, то ее можно задать вторым параметром указанной функции.

Пример ПI.4. *Преобразование обыкновенной дроби в десятичную*

```
> evalf(456/789);
```

$$.5779467681$$

```
> evalf(456/789,30);
```

$$.577946768060836501901140684411$$

Радикалы задаются как результат возведения в дробную степень целых или дробных чисел, или вычисления из них же квадратного корня функцией sqrt(), или вычислением корня n - степени с помощью функции surd(число,n). В Maple операция возведения в степень задается символом $\wedge$ или последовательностью из двух звездочек (**). При возведении в степень дробей их следует заключать в круглые скобки, как, впрочем, и дробный показатель степени. При задании радикалов также производятся возможные упрощения, связанные с вынесением из-под знака радикала максимально возможной величины.

Пример III.5. *Задания радикалов*

```
> (3/4)^(2/3);
```

$$\frac{1}{4}\,3^{(2/3)}\,4^{(1/3)}$$

```
> sqrt(68/9);
```

$$\frac{2}{3}\sqrt{17}$$

```
> surd(75/3,4);
```

$$\sqrt{5}$$

Вычисления с целыми, дробями и радикалами являются *абсолютно точными*, так как при работе с этими типами данных программа Maple не производит никаких округлений в отличии от чисел с плавающей точкой. *Числа с плавающей точкой* задаются в виде целой и дробной частей, разделенных десятичной точкой, с предшествующим знаком числа, например, 2.3456, -3.415. Числа с плавающей точкой можно задавать, используя так называемую экспоненциальную форму записи, в которой сразу же после вещественного числа с плавающей точкой или обычного целого, называемого мантиссой, ставится символ или e или E, после которого задается целое число со знаком (показатель степени). Такая форма записи вещественного числа означает, что мантиссу следует умножить на десять в степени числа, соответствующему показателю степени, чтобы получить значение числа, записанного в такой экспоненциальной форме. Например, $2.345e^4$ соответствует числу 23450.0. Таким образом можно представлять очень большие по абсолютному значению числа (показатель степени положительное число) или очень маленькие (показатель степени отрицательных число).

Из чисел можно составлять математические выражения с помощью арифметических операций. Символами арифметических операций в Maple являются символы, перечисленные в следующей таблице.

Последовательность выполнения арифметических операций соответствует стандартным правилам старшинства операций в математике: сначала производится возведение в

Таблица.1. Арифметические операции

Символ	Операция
+	Сложение
-	Вычитание
*	Умножение
/	Деление
∧ или **	Возведение в степень
!	Факториал (применим к только неотрицательным числам)

степень, затем умножение и деление, а в конце - сложение и вычитание. Все действия выполняются слева направо. Операция вычисления факториала имеет наибольший приоритет. Для изменения последовательности арифметических операций следует использовать круглые скобки. Если в выражении все числа являются целыми, дробями или радикалами, то результат представляется также с использованием этих типов данных, но если в выражении присутствует число с плавающей точкой, то результатом вычисления такого "смешанного" выражения будет также число с плавающей точкой, если только в выражении не присутствует радикал. В этом случае радикал вычисляется точно, а коэффициент при нем вычисляется либо точно, либо в виде числа с плавающей точкой в зависимости от типа сомножителей.

Пример ПI.6. *Вычисление "смешанных" арифметических выражений*

```
> 3^5*0.1;
```

$$24.3$$

```
> 3^5*(1/10);
```

$$\frac{243}{10}$$

```
> 2e1+4/5+sqrt(3)*4/5*0.1+surd(5,3)*28/10;
```

$$20.80000000 + .08000000000\,\sqrt{3} + \frac{14}{5}\,5^{(1/3)}$$

Maple всегда пытается произвести вычисления с абсолютной точностью. Если это не получается, тогда он подключает арифметику с вещественными числами.

Maple работает и с комплексными числами. Для мнимой единицы $\sqrt{-1}$ используется константа i. Задание комплексного числа не отличается от его обычного задания в математике.

```
> 2/5+3*i;
```

$$\frac{2}{5} + 3\,i$$

Maple умеет выполнять все арифметические действия над комплексными числами точно так же, как он это делает и с действительными целыми, дробями и с плавающей точкой.

Пример ПII.7. *Арифметические операции с комплексными числами*

```
> (2/5+3*I)+(4+1/2*I);
```

$$\frac{22}{5} + \frac{7}{2}\,I$$

```
> (2/5+3*I)*(4+1/2*I);
```

$$\frac{1}{10} + \frac{61}{5}\,I$$

```
> (2/5+3*I)/(4+1/2*I);
```

$$\frac{62}{325} + \frac{236}{325}\,I$$

```
> (2/5+3*I)/(4+1.0/2*I);
```

$$.1907692308 + .7261538462\,I$$

Если хотя бы одна из действительных или мнимых частей комплексного числа вычисляется в виде числа с плавающей точкой, то результат также представляется через эти числа.

Для выделения из комплексного числа действительной и мнимой части в Maple предусмотрены две функции: Re() для действительной и Im() для мнимой части комплексного числа. Вычислить аргумент комплексного числа можно с помощью функции argument(), а построить комплексно-сопряженное - функцией conjugate();

```
> Re(5+3*I);
```

$$5$$

```
> conjugate(5+3*I);
```

$$5 - 3\,I$$

```
> argument(%);
```

$$-\arctan(\frac{3}{5})$$

II.2 Константы

Кроме чисел, задаваемых пользователем, Maple содержит целый ряд предопределенных *именованных констант* - констант, к значению которых можно обращаться с помощью некоторого имени. Часть этих констант не может быть изменена, а часть можно изменять. Неизменяемые константы представлены в следующей таблице. Константы, значения которых могут быть предопределены, - это константы, задающие необходимые для работы программы параметры. К наиболее важным можно отнести две константы, которые влияют на точность вычислений: Digits и Order.

Пример ПII.8. *Изменение значения константы Digits*

Таблица.2. Неизменяемые константы

Константа	**Значение**
Catalan	Число, являющееся суммой ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sqrt{\dfrac{(-1)^j}{(2I+1)^2}}$, приближенно равно 0.9159655942...
false	Значение "ложь" при работе с булевскими переменными
true	Значение "истина" при работе с булевскими переменными
FALL	Используется в качестве третьего значения при вычислении функций трехзначной логики
gamma	Константа Эйлера $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{I} - \ln(n)\right) \approx 0.5772156649...$
Pi	Число $\pi = 3.141592654...$
I	Мнимая единица $\sqrt{-1}$
infinity	Бесконечность ∞

```
> evalf(Pi);
```

$$3.141592654$$

```
> Digits:=30;
```

$$Digits := 30$$

```
> evalf(Pi);
```

$$3.14159265358979323846264338328$$

Первая константа задает число значащих цифр для операций с числами с плавающей точкой. По умолчанию она имеет значение 10. Константа Order определяет количество членов в разложении функции в ряд Тейлора (по умолчанию установлена равной 6).

II.3 Строки

Кроме чисел Maple позволяет работать со *строкой* - любым набором символов, заключенным в двойные кавычки, например, "Это пример строки в Maple ". Каждый символ в строке представляет самого себя. Длина строки в Maple практически не ограничена и может достигать на 32-битных компьютерах длины в 268 435 439 символов. Если необходимо, чтобы в строке присутствовали двойные кавычки, то следует поместить в строку идущие подряд две двойные кавычки или скрыть их основное значение с помощью символа обратной наклонной черты (/). При этом в области вывода и пара двойных кавычек, и двойные кавычки с предшествующей обратной наклонной чертой отображаются как пара символов `\"` . Однако интерпретатором Maple эта пара символов рассматривается как один символ двойных кавычек, в чем можно убедиться, выполнив команду length(), подсчитывающую количество символов в строке:

```
> "ST\"RING""";
```

$$\text{“ST\textbackslash“RING\textbackslash“”}$$

```
> length(%);
```

$$8$$

Если идут подряд две строки, разделенные символами-разделителями (пробел, табуляция или переход на новую строку), то эти две строки соединяются в одну, причем значение второй без пробела пристраивается в конец первой строки:

```
> "Одна строка" "Вторая строка";
```

“Одна строкаВторая строка”

Соединение строк можно осуществить и с помощью операции *конкатенации* (||), или обращением к функции cat():

```
> "Одна строка" ||"Вторая строка";
```

“Одна строкаВторая строка”

```
> cat("Одна строка","Вторая строка");
```

“Одна строкаВторая строка”

Строка представляется как одномерный массив, поэтому можно использовать индекс для выделения подстроки из заданной:

```
> "STRING"[4..5];
```

“IN”

```
> s:="STRING";
```

$s :=$ “STRING”

```
> s[4];
```

“I”

II.4 Переменные, неизвестные и выражения

Каждая *переменная* Maple имеет имя, представляющее последовательность латинских символов, начинающихся с буквы, причем строчные и прописные буквы считаются различными. (Про такие системы говорят, что они чувствительны к регистру.) Кроме букв в именах переменных могут использоваться также цифры и знак подчеркивания, однако первым символом в имени должна быть буква. Примеры различных имен: MyName, myname, `my_name`.

В качестве имен запрещено использовать зарезервированные слова языка Maple:

Таблица.3.

and	end	in	od	save
break	error	intersect	option	stop
by	export	local	options	then
catch	fi	minus	or	to
description	finally	mod	proc	try
do	for	module	quit	union
done	from	next	read	use
elif	global	not	return	while
else	if			

Нельзя также использовать так называемые защищенные слова Maple, к которым, в частности, относятся имена не изменяемых констант. Попытка присвоить такому имени какое-либо значение приводит к ошибке:

```
> Catalan:=7;
```

```
Error, attempting to assign to ‘Catalan‘ which is protected
```

```
> Ошибка, попытка присвоить значение защищенному символу
> ’Catalan’
```

Можно задавать переменные с именами, содержащими пробелы, но для этого их следует заключить в обратные кавычки:

```
> ‘Name with space‘:=789;
```

$$Name\ with\ space := 789$$

```
> ‘Name with space‘;
```

$$789$$

Выражение представляет собой комбинацию имен переменных, чисел и, возможно других объектов Maple, соединенных знаками допустимых операций. Единственным предназначением выражения является его вычисление и получение результата, который можно использовать в операторах языка Maple при дальнейших вычислениях. Если в выражении используется переменная, которой не присвоено никакого числового или строкового значения, то такая переменная рассматривается системой Maple как некая *неизвестная* величина, а выражение, содержащее неизвестные, называется *символьным выражением*. Именно для работы с такими выражениями прежде всего и разрабатывался Maple:

```
> x^2+5*x+1;
```

$$x^2 + 5\,x + 1$$

```
> sqrt(exp(sin(x*y)));
```

$$\sqrt{e^{\sin(x\,y)}}$$

Maple в области вывода действительно печатает неизвестные переменные как простые математические неизвестные, имена которых соответствуют именам переменных.

Для работы с символьными выражениями существует огромное количество функций или команд. Например, можно вычислить производную символьного выражения по какой-либо неизвестной или интеграл, в котором в качестве подынтегральной функции используется символьное выражение, можно упростить его, приведя к виду, удобному для дальнейшего применения и многое другое. Основная деятельность пользователя Maple и направлена на выполнение разнообразных преобразований с символьными выражениями. Важной операцией в Maple, связанной с выражениями, является операция *присваивания* (:=). Она имеет следующий синтаксис:
переменная := выражение;
Здесь в левой части задается имя переменной, а в правой части любое выражение, которое может быть числовым, символьным или просто другой переменной. Смысл этого оператора в том, что переменной в левой части присваивается значение выражения, стоящего в правой части. В дальнейшем, если будет необходимо использовать выражение из левой части операции присваивания, то достаточно сослаться на имя переменной, указанное в правой части операции.

Переменные позволяют хранить и обрабатывать разнообразные типы данных, с которыми работает Maple. Мы уже знакомы с такими типами данных, как целый (integer), дробь (fraction), числовой вещественный с плавающей точкой (float) и строка (string). Кроме этих типов данных существует еще большое множество типов, необходимых для выполнения аналитических преобразований: функция (function), индексные данные (indexed), множество (set), список (list), ряды (series), последовательность выражений (exprseq) и некоторые другие. В дальнейшем мы познакомимся со всеми этими типами данных.

По умолчанию переменная Maple имеет тип symbol, представляющий символьную переменную, и ее значением является ее собственное имя. Поэтому простое объявление переменной m оператором m; приведет к отображению в области вывода рабочего листа имени этой переменной.

Пример III.9. *Задание и определение типа символьной переменной*

```
> m;
```

$$m$$

```
> whattype(m);
```

$$symbol$$

В этом примере можно видеть функцию whattype(), которая определяет тип выражения или переменной, заданных в качестве ее параметра.

То, что переменная по умолчанию имеет символьный тип, оказывается очень полезным при использовании функций. Если имя функции Maple задано не совсем правильно, или такой функции не существует, или не подключен пакет, где она расположена, то ответом Maple на попытку вычислить ее будет отображение в области вывода не результата выполнения функции, а полностью повторенная строка области ввода.

При присвоении переменной какого-либо значения, ее тип изменяется на тип присвоенного ей значения.

Переменные можно использовать для составления выражений наряду с числами. Все, сказанное выше о числовых выражениях и порядке их вычисления, относится и к выра-

Таблица.4. Основные математические функции

Функция	**Синтаксис Maple**	**Функция**	**Синтаксис Maple**
e^x	exp(x)	$\sqrt{x}$	sqrt(x)
$\ln(x)$	ln(x) или log(x)	$\|x\|$	abs(x)
$\log_{10}(x)$	log10(x)	sgn(x)	signum(x)
$\log_a(x)$	log[a](x)	$n!$	n!

жениям, содержащим переменные.

Обычно в математических выражениях используются разнообразные математические функции. В Maple изначально определен большой набор стандартных математических функций, начиная от элементарных и заканчивая специальными функциями, которые используются при решении сложных задач математической физики. В таблице Табл.4 представлены основные математические функции и соответствующий им синтаксис Maple.

Тригонометрические и гиперболические функции сведены в таблице (Табл.5). Задания параметров тригонометрических функций задаются в радианах.

Задание обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций представлены в таблице Табл.6.

II.5 Команды преобразования выражений

Технология работы в Maple заключается в том, что пользователь создает переменные, присваивает им символьные выражения и производит над ними некоторые действия в соответствии с алгоритмом решения поставленной задачи, используя стандартные функции или написанные собственные процедуры.

Синтаксис вызова стандартной программы следующий:
команда (`пар_1, пар_2, ...,пар_n`);
или:
команда (`пар_1, пар_2, ...,пар_n`):
Здесь *команда* - имя вызываемой функции, а `пар_1, пар_2,` ... означают необходимые

Таблица.5. Тригонометрические и гиперболические функции

Функция	**Синтаксис Maple**	**Функция**	**Синтаксис Maple**
$\sin x$	sin(x)	$\operatorname{sh} x$	sinh(x)
$\cos x$	cos(x)	ch(x)	cosh(x)
tg(x)	tan(x)	th(x)	tanh(x)
sec(x)	sec(x)	sech(x)	sech(x)
cosec(x)	csc(x)	cosech(x)	csch(x)
ctg(x)	cot(x)	cth(x)	coth(x)

Таблица.6. Обратные тригонометрические и гиперболические функции

Функция	**Синтаксис Maple**	**Функция**	**Синтаксис Maple**
$\arcsin x$	arcsin(x)	arcsh(x)	arcsinh(x)
$\arccos x$	arccos(x)	arcch(x)	arccosh(x)
arctg(x)	arctan(x)	arcth(x)	arctanh(x)
arcsec(x)	arcsec(x)	arcsech(x)	arcsech(x)
arccosec(x)	arccsc(x)	arccosech(x)	arccsch(x)
arcctg(x)	arccot(x)	arccth(x)	arccoth(x)

для выполнения команды параметры, которые могут быть переменными или даже выражениями, причем их тип должен соответствовать типу параметров используемой функции. Первая форма задания команды (с завершающей точкой с запятой) осуществляет отображение результатов ее выполнения в области вывода, тогда как при второй форме (с завершающим двоеточием) команда выполняется, но никакого вывода результатов не происходит.

Система обозначений функций в Maple проста, поэтому обыкновенно имя функции соответствует действию, которое она выполняет (все имена заданы на английском языке). Например, ясно, что функция с именем simplify() осуществляет некоторые упрощения над выражением, заданным в качестве ее параметра.

Для некоторых команд существуют две формы: *активная* и *пассивная*. В случае вызова активной формы команды, которая немедленно будет выполнена, ее имя начинается со строчной буквы. Пассивная форма команды не выполняется немедленно, а просто в области вывода отображает математическую запись того, что она может сделать. Ее имя начинается с прописной буквы. В дальнейшем, если в операторе присваивания для некоторой переменной в правой части задана пассивная форма команды, то командой value() ее можно вычислить. Однако основное предназначение пассивных форм команд - использование их как средства документирования производимых действий в обычной математической записи. Примерами команд с двумя формами являются команда дифференцирования (dift и Dift), интегрирования (int и Int)и др.

Пример ПII.10. *Пассивная и активная формы команд*

```
> g:=Int(sin(x)^2,x);
```

$$g := \int \sin(x)^2\,dx$$

```
> g=int(sin(x)^2,x);
```

$$\int \sin(x)^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x$$

```
> value(g);
```

$$-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x$$

Команды и функции, являющиеся частью ядра системы Maple, всегда доступны пользователю, тогда как для вызова других команд и функций необходимо подключить библиотеку или пакет, в которых они расположены. Для этого используются команды readlib() и with(). Первая подключает библиотеку, вторая пакет. Примером этих команд является имя библиотеки или пакета, функции которых пользователь желает использовать. Наиболее часто используемые при выполнении аналитических вычислений.

II.5.1 Упрощение выражения: simplify()

Команда simplify() - предназначена для упрощения разнообразных выражений, включающих рациональные дроби (алгебраические выражения), содержащих тригонометрические, обратные тригонометрические функции, логарифмы и экспоненты, т.е. с ее помощью можно попытаться упростить выражение, составленное из элементарных функций.

Maple может упростить а может и не упростить, так как он использует свои внутренние алгоритмы упрощения, результат выполнения которых может не совсем соответствовать взглядам пользователя на то, как он хотел бы упростить выражение и в каком виде его получить. Задача упрощения во всех системах аналитических вычислений - это достаточно сложная проблема. В одном контексте вычислений какое-то преобразование считается упрощением, а в другом то же самое преобразование может и не считаться упрощением. Например, при решении тригонометрических уравнений не всегда рационально заменять $sin(x)^2+cos(x)^2$ на 1, хотя это явное упрощение. Иногда надо сделать наоборот: единицу представить в виде суммы квадратов синуса и косинуса, и вот такое "упрощение", приведет к упрощению всего уравнения, позволит разложить его на множители и решить поставленную задачу.

Эта команда имеет несколько форм вызова, отличающихся наличием параметров, управляющих процедурой упрощения. Ее самый простой синтаксис имеет следующий вид: simplify(выражение);
В скобках в качестве параметра передается выражение, подлежащее упрощению. Команда simplify() ищет в выражении вызовы функций, квадратные корни, радикалы и степени и инициализирует подходящие процедуры упрощения. Реально команда simplify() реализована в виде набора процедур упрощения, хранящихся в основной библиотеке Maple. Мы перечислим часть из них, остальные можно найти в справке по этой команде (например, установив курсор в рабочем листе на ее имя и нажав клавишу <F1>) : 'simplify/exp' - для упрощения выражений с экспоненциальными функциями, 'simplify/ln' - для упрощения выражений с логарифмами, 'simplify/sqrt' - для упрощения выражений, содержащих квадратные корни, 'simplify/trig' - для упрощения выражений с тригонометрическими функциями, 'simplify/radical' - для упрощения выражений с радикалами (дробные степени), 'simplify/power' - для упрощения выражений со степенями, экспонентами и логарифмами и т. д. По умолчанию Maple пытается использовать максимальный набор функций упрощения, подходящий к конкретному выражению.

В вызове команды можно задать конкретные процедуры упрощения, и тогда только они будут использоваться для упрощения заданного выражения, а не весь возможный установленный по умолчанию набор. Такой вызов обеспечивается следующим синтаксисом команды: simplify(*выражение*, n1, n2, ...);
Здесь n1, n2 и т.д. являются именами процедур упрощения: Ei, GAMMA, RootOf, θ, hypergeom, Ln, polar, power, radical, sqrt, trig. Полную информацию о формулах упрощения при использовании перечисленных значений параметров можно получить с помощью команды ?simplify(*имя*), где *имя* - одно из значений параметров функции упрощения.

При упрощении выражения можно предположить, что все переменные в нем являются, например, положительными, или принадлежат некоторому отрезку действительных чисел. Это осуществляется заданием ключевого параметра assume = *свойство*. Форма вызова команды в этом случае имеет вид:
simplify(*выражение*, assume=*свойство*);
где параметр *свойство* может принимать одно из следующих значений: complex - комплексная область, real - действительная область, positive - положительные действительные числа, integer - целые числа, RealRange(a,b) - интервал (a,b) действительных чисел. Ниже представлены примеры использования команды упрощения выражений simplify():

Пример ПII.11. *Упрощение выражений*

```
> restart:
> f:=ln(exp(x));
```

$$f := \ln(e^x)$$

```
> simplify(f);
```

$$\ln(e^x)$$

```
> simplify(f, Ln, assume=real);
```

$$x$$

```
> a:=1/sqrt(5)*(((1+sqrt(5))/2)^3-((1-sqrt(5))/2)^3);
```

$$a := \frac{1}{5}\sqrt{5}\,((\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})^3 - (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})^3)$$

```
> simplify(a);
```

$$2$$

Обратим внимание на упрощение выражения f. Использование команды без параметров не упростило выражения $ln(e^x)$, тогда как второй оператор с предположением о действительной области изменения переменной x упростил заданное выражение. При упрощении Maple предполагает, что там, где это возможно, переменные изменяются в области комплексных чисел. При таком предположении упростить выражение f действительно невозможно.

При вызове команды упрощения можно последним, или единственным, не считая самого упрощаемого выражения, параметром задать параметр с именем symbolic. В этом случае, если выражение содержит многозначные функции, например, квадратный корень, то относительно таких функций будет осуществлено формальное символическое упрощение. Это означает, что не будет приниматься во внимание различное поведение многозначных функций при нахождении их аргумента в разных областях комплексной плоскости или действительной оси. Так, в случае с функцией $y = \sqrt{x^2}$ при упрощении следует учитывать, положительна или отрицательна неизвестная x, задание параметра symbolic снимает эту неопределенность, используя формальное правило: квадратный корень из квадрата какой-либо величины равен этой величине.

Пример ПII.12. *Упрощение с предположением*

```
> f:=(sqrt(x^2));
```

$$f := \sqrt{x^2}$$

```
> simplify(f);
```

$$\mathrm{csgn}(x)\,x$$

```
> simplify(f,assume=real);
```

$$|x|$$

```
> simplify(f,assume=positive);
```

$$x$$

```
> simplify(f,symbolic);
```

$$x$$

Команда упрощения позволяет задать правила упрощения в виде равенств. Эти правила задаются вторым параметром, который должен иметь следующий вид:
(*равенство*1, *равенство*2, ...)
Если какое-либо выражение при упрощении должно равняться нулю, то такое правило можно задать, просто внеся выражение без знака равенства в список правил:

```
> restart:
> g:=a^2+b^2+3*c;
```

$$g := a^2 + b^2 + 3\,c$$

```
> simplify(g,{b^2,a^2+c=1});
```

$$2\,c + 1$$

Использование собственных правил для упрощения тригонометрических выражений позволяет получить именно тот его вид, который необходим для дальнейшей работы, так как третьим параметром можно определить в какой последовательности должны отображаться неизвестные в упрощенном выражении. Этот параметр задается в двух формах: в виде множества и в виде списка. (Список - это тоже объект Maple, который пока можно считать как список выражений через запятую, заключенный в квадратные скобки.)Так вот, если он задан в виде множества, то алгоритм упрощения сортирует в выражении неизвестные по убыванию их степени в слагаемых выражениях, учитывая степени всех неизвестных, а потом начинает упрощения в соответствии с заданными правилами. В случае со списком - сначала выражение сортируется по степеням первой неизвестной в списке, а затем упрощается в соответствии с заданными правилами, затем полученное выражение сортируется по степеням второй неизвестной списка и упрощается и т.д.

Пример ПI.13. *Упрощение в соответствии с правилами пользователя*

```
> equ:={sin(x)^2+cos(x)^2=1};
> e:=sin(x)^3-11*sin(x)^2*cos(x)+3*cos(x)^3-sin(x)*cos(x)+2;
```

$$equ := \{\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1\}$$

$$e := \sin(x)^3 - 11\sin(x)^2\cos(x) + 3\cos(x)^3 - \sin(x)\cos(x) + 2$$

```
> simplify(e,equ,[sin(x),cos(x)]);
```

$$14\cos(x)^3 - \sin(x)\cos(x) + 2 - \sin(x)\cos(x)^2 + \sin(x) - 11\cos(x)$$

```
> simplify(e,equ,[cos(x),sin(x)]);
```

$$\sin(x)^3 - 14\sin(x)^2\cos(x) - \sin(x)\cos(x) + 2 + 3\cos(x)$$

```
> simplify(e,equ,{sin(x),cos(x)});
```

$$\sin(x)^3 - 14\sin(x)^2\cos(x) - \sin(x)\cos(x) + 2 + 3\cos(x)$$

```
> simplify(e,equ,{cos(x),sin(x)});
```

$$\sin(x)^3 - 14\sin(x)^2\cos(x) - \sin(x)\cos(x) + 2 + 3\cos(x)$$

II.5.2 Раскрытие скобок в выражении: expand()

Основное назначение команды expand() - представить произведение в виде суммы, т.е. данная команда раскрывает скобки в алгебраическом выражении. Она выполняется для любого полинома. Для частного двух полиномов (рациональная алгебраическая дробь) эта команда раскрывает скобки в числителе и делит каждый член полученного выражения на знаменатель, с которым она не производит никаких преобразований.

Кроме того, данная команда умеет работать с большинством математических функций и знает как раскрывать скобки в выражениях, содержащих следующие функции: sin(x), cos(x), tg(x), sh(x),ch(x), th(x), ln(x), exp(x), abc(x), специальные математические функции и др. Эта команда имеет следующий синтаксис:

Эта команда имеет следующий синтаксис: expand(*выр*1, *выр*2, ..., *выр*n);
где *выр* является выражением, в котором необходимо раскрыть скобки, а необязательные параметры *выр*1, *выр*2, ..., *выр*n указывает системе, что в данных выражениях в заданном преобразуемом выражении *выр* раскрывать скобки не надо.

Пример ПII.14. *Представление произведений в виде суммы*

```
> expand((x+1)*(x+2));
```

$$x^2+3\,x+2$$

```
> expand((x+1)^3/(x+2)^2);
```

$$\frac{x^3}{(x+2)^2}+\frac{3\,x^2}{(x+2)^2}+\frac{3\,x}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$$

```
> expand(sin(x+y));
```

$$\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$$

```
> expand(exp(a+ln(b)));
```

$$e^a\,b$$

```
> expand((x+1)^2*(y+2),x+1);
```

$$(x+1)^2\,y+2\,(x+1)^2$$

Данная функция знает правила преобразования тригонометрических выражений, выражений с экспоненциальными функциями, полиномами и другими функциями.

II.5.3 Разложение полинома на множители: factor()

Основное предназначение команды factor() - разложить на множители полином от нескольких переменных. Под полиномом в Maple понимается выражение, содержащее неизвестные величины, в котором каждый член представлен в виде произведения целых неотрицательных степеней неизвестных величин с числовым или алгебраическим коэффициентом, т.е. коэффициент может быть целым, дробным, с плавающей точкой, комплексным числом и даже представлять собой алгебраическое выражение с другими переменными:

```
> factor(x^3*y-x^3*b-x^2*a*y+x^2*a*b+2*x^2*y^2-2*x^2*y*b-2*x*y^2*a+2*x*
> y*a*b+y^3*x-y^2*x*b-y^3*a+y^2*a*b);
```

$$(x+y)^2\,(x-a)\,(y-b)$$

Неизвестная в полиноме может быть представлена обращением к математической функции, параметр которой есть неизвестная:

```
> factor(cos(y)^2-2*sin(x)*cos(y)+sin(x)^2);
```

$$(\cos(y)-\sin(x))^2$$

Относительно этой команды следует помнить одно правило: она раскладывает полином на множители над числовым полем, которому принадлежат коэффициенты полинома. Это означает, если все коэффициенты целые, то и в получаемых сомножителях будут только целые коэффициенты и не обязательно будут получены линейные сомножители. Второй необязательный параметр этой команды служит для указания, над каким числовым полем следует осуществлять разложение полинома. Он может иметь значение real, complex, а также один радикал или список.множество радикалов.

Пример ПII.15. *Разложение полинома над разными полями*

```
> factor(x^3+2);
> # над полем целых чисел
> # (целые коэффициенты
```

$$x^3+2$$

```
> factor(x^3+2.0); # над полем вещ. чисел
> # (вещ. коэффициент)
```

$$(x+1.259921050)\,(x^2-1.259921050\,x+1.587401052)$$

```
> factor(x^3+2,real);
> # над полем вещественных чисел
> #(параметр real)
```

$$(x+1.259921050)\,(x^2-1.259921050\,x+1.587401052)$$

```
> factor(x^3+2,complex);
> # над полем комплексных чисел
> #(параметр complex)
```

$$(x+1.259921050)\,(x-.6299605249+1.091123636\,I)$$
$$(x-.6299605249-1.091123636\,I)$$

```
> factor(x^3+2,2^(1/3));
> # над полем целых и радикала 2^(1/3)
> # (параметр определяет поле с радикалом)
```

$$(x^2-x\,2^{(1/3)}+2^{(2/3)})\,(x+2^{(1/3)})$$

При применении этой же команды к алгебраической рациональной дроби (отношение двух полиномов) сначала осуществляется приведение дроби к нормальной форме (сокращение общих множителей числителя и знаменателя), а после этого числитель и знаменатель раскладываются на множители (с учетом поля коэффициентов):

```
> rational_exp:=(x^15-y^15)/(x^8-y^8);
```

$$rational\_exp := \frac{x^{15} - y^{15}}{x^8 - y^8}$$

```
> factor(rational_exp);
```

$$\frac{(y^2 + x\,y + x^2)\,(y^4 + y^3\,x + y^2\,x^2 + y\,x^3 + x^4)\,(y^8 - y^7\,x + y^5\,x^3 - y^4\,x^4 + y^3\,x^5 - y\,x^7 + x^8)}{(y + x)\,(x^2 + y^2)\,(x^4 + y^4)}$$

II.5.4 Сокращение алгебраической дроби

Назначение команды normal() - привести выражение, содержащее алгебраические дроби, к общему знаменателю и упростить полученную алгебраическую дробь, сократив и числитель и знаменатель на наибольший общий делитель. Она имеет две формы вызова: normal(f); normal(f,expanded); где f - алгебраическая дробь, а параметр expanded служит для указания того, что после сокращения дроби в числителе и знаменателе раскрываются скобки.

Пример III.16. *Сокращение алгебраических дробей*

```
> fr:=1/(x+1)+1/x+x/(x+1);
```

$$fr := \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{x}{x+1}$$

```
> fr:=normal(fr);
```

$$fr := \frac{x+1}{x}$$

```
> f:=(x^2-y^2)/(x-y)^3;
```

$$f := \frac{x^2 - y^2}{(-y + x)^3}$$

```
> normal(f);
```

$$\frac{y + x}{(-y + x)^2}$$

```
> normal(2/x+y/3=0);
```

$$\frac{1}{3}\,\frac{6 + x\,y}{x} = 0$$

Если параметр f задан в виде списка, множества, последовательности, ряда, уравнения, отношения или функции, то команда normal() последовательно применяется к компонентам f. Например, для уравнения это означает, что процедура сокращения применяется и к правой, и к левой части уравнения. В случае ряда это означает, что упрощаются коэффициенты ряда, а в случае выражения с несколькими функциями, аргументы которых представлены алгебраическими дробями, процедура сокращения применяется к аргументу каждой функции:

```
> s:=sin(x/(x+1)-x)^2+cos(-x/(x+1)+x);
```

$$s := \sin(\frac{x}{x+1} - x)^2 + \cos(-\frac{x}{x+1} + x)$$

```
> normal(s);
```

$$\sin(\frac{x^2}{x+1})^2 + \cos(\frac{x^2}{x+1})$$

```
> normal(2/x+y/3=x/y+y/x+2);
```

$$\frac{1}{3}\,\frac{6 + x\,y}{x} = \frac{x^2 + y^2 + 2\,x\,y}{x\,y}$$

II.5.5 Приведение нескольких членов выражения к одному: combine()

Команда combine() приводит несколько членов в выражении, представленном суммой, произведением или степенями неизвестных, к одному члену, используя разнообразные правила, которые, по существу, противоположны правилам, применяемым командой expand(). Например, рассмотрим известное тригонометрическое соотношение:

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

Команда expand() использует его слева направо, тогда как команда combine() действует наоборот, представляя сумму произведений синусов и косинусов в виде одной тригонометрической функции, но с аргументом, являющимся комбинацией аргументов тригонометрических функций в преобразуемом выражении:

```
> g:=sin(a+b)^2;
```

$$g := \sin(a + b)^2$$

```
> s:=expand(g);
```

$$s := \sin(a)^2\cos(b)^2 + 2\sin(a)\cos(b)\cos(a)\sin(b) + \cos(a)^2\sin(b)^2$$

```
> combine(s);
```

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\,a + 2\,b)$$

Обратите внимание, что команда combine() преобразовала выражение s не к исходному выражению g, которое мы раскрыли функцией expand(). Это связано с тем, что Maple осуществляет приведение членов выражения по своим внутренним алгоритмам, которые завершаются, как только получилось (или не получилось) представление в соответствии с идеологией команды combine(). В нашем примере - представление через тригонометрическую функцию с аргументом, являющимся линейной комбинацией аргументов тригонометрических функций преобразуемого выражения. Если, однако, желательно получить исходный вид выражения g, то следует воспользоваться командой подстановки subs(), параметры которой определяют, что на что следует заменить в выражении:

```
> f:=(1-cos(2*a+2*b))/2;
```

$$f := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\,a + 2\,b)$$

```
> subs(cos(2*a+2*b)=-2*sin(a+b)^2+1,f);
```

$$\sin(a+b)^2$$

Команда combine() «знает» практически все правила преобразования элементарных математических функций. Если вторым ее параметром задать одно из следующих имен:

Таблица.7.

abs	exp	piecewise	Psi	Signum
arctan	icombine	polylog	radical	trig
conjugate	ln	power	range	

которые соответствуют используемым в Maple функциям, то при преобразовании выражения будут применяться только правила преобразования соответствующих функций. Для функций, правила преобразования которых зависят от значения их аргументов (arctan) или которые имеют ограничения на значения аргументов (ln, radical), можно задать третий параметр symbolic, который будет предписывать функции combine() не обращать внимания на интервалы изменения аргументов подобных функций, а осуществлять формальные символические преобразования в соответствии с формулами преобразования этих функций. Преобразования с большинством функций в основном ясны. Например, если используется опция ln, то к выражению применяются следующие преобразования, известные из школьного курса математики:

Таблица.8.

$a * \ln(x)$	$\Longrightarrow$	$\ln(x \wedge a)$ (если $a * argument(x) = argument(x \wedge a)$)
$\ln(x) + \ln(y)$	$\Longrightarrow$	(если argument($x * y$)= argument(x)+argument(y))

Особенно отметим преобразование с опцией icombine, которая пытается представить произведение степеней целых чисел таким образом, чтобы в полученном произведении степени не имели общих множителей:

```
> combine(4^a*6^b*12^c*5^d,power);
```

$$4^a\,6^b\,12^c\,5^d$$

```
> combine(4^a*6^b*12^c*5^d,icombine);
```

$$2^{(2\,a+b+2\,c)}\,3^{(c+b)}\,5^d$$

II.5.6 Приведение подобных членов: collect()

Команда collect() работает с обобщенными полиномами нескольких переменных - полиномами, в которых в качестве неизвестных могут выступать функции с аргументами, являющиеся неизвестными величинами Maple. Синтаксис этой команды имеет три формы: collect(*выражение,x*)
collect(*выражение,x, form, func*)
collect(*выражение,x*, func)

В них параметр x представляет имя неизвестной величины, список или множество неизвестных в случае полинома нескольких переменных или имя функции с аргументом-неизвестной в выражении, представленном первым параметром *выражение*, и относительно степеней которой осуществляется приведение коэффициентов. Команда collect() различает не только целые, но и положительные и отрицательные дробные степени неизвестной, т.е. при всех степенях будут отдельно приведены подобные члены.

Пример ПII.17. *Приведение коэффициентов в выражении*

```
> g:=int(x^2*(exp(x)+sin(x)),x);
```

$$g := x^2\, e^x - 2\,x\,e^x + 2\,e^x - x^2\cos(x) + 2\cos(x) + 2\,x\sin(x)$$

```
> collect(g,x);
```

$$(-\cos(x) + e^x)\,x^2 + (-2\,e^x + 2\sin(x))\,x + 2\cos(x) + 2\,e^x$$

```
> collect(g,exp(x));
```

$$(2 + x^2 - 2\,x)\,e^x + 2\cos(x) + 2\,x\sin(x) - x^2\cos(x)$$

```
> collect(g,cos(x));
```

$$(-x^2 + 2)\cos(x) + x^2\,e^x - 2\,x\,e^x + 2\,e^x + 2\,x\sin(x)$$

Команды collect() примера ПII.17 для одного и того же выражения осуществляют приведение коэффициентов относительно разных его неизвестных компонентов.

Параметр form имеет смысл для полиномов от нескольких переменных и определяет алгоритм приведения подобных членов, причем неизвестные при степенях которых приводятся подобные члены, должны быть заданы в виде списка или множества. Он имеет два значения: recursive (значение по умолчанию) и distributed. Первый инициирует следующий алгоритм: приводятся подобные члены при степенях первой неизвестной в списке, далее в полученных коэффициентах приводятся подобные члены относительно степеней второй неизвестной в списке и т.д. Если при этом значении параметра form неизвестные полинома, относительно которых приводятся подобные члены, заданы в виде множества, то порядок приведения определяется системой Maple и может меняться от сеанса к сеансу. Значение distributed указывает на приведение коэффициентов при членах, содержащих всевозможные произведения степеней неизвестных в списке или множестве, причем суммарная степень всех переменных возрастает от наименьшей к наибольшей.

Пример ПII.18. *Алгоритмы приведения для полиномов нескольких переменных*

```
> p:=x*y-a^2*x*y+y*x^2-a*y*x^2+x+a*x;
> #полином двух переменных
```

$$p := x\,y - a^2\,x\,y + y\,x^2 - a\,y\,x^2 + x + a\,x$$

```
> collect(p,[x,y],recursive);
```

$$(1-a)\,y\,x^2 + ((1-a^2)\,y + 1 + a)\,x$$

```
> collect(p,[y,x],recursive);
```

$$((1-a)\,x^2 + (1-a^2)\,x)\,y + (1+a)\,x$$

```
> collect(p,{x,y},recursive);
```

$$(1-a)\,y\,x^2 + ((1-a^2)\,y + 1 + a)\,x$$

```
> collect(p,{x,y},distributed);
```

$$(1+a)\,x + (1-a)\,y\,x^2 + (1-a^2)\,x\,y$$

```
> collect(p,[x,y],distributed);
```

$$(1+a)\,x + (1-a)\,y\,x^2 + (1-a^2)\,x\,y$$

Параметр func определяет имя команды, которая применяется к полученным в результате коэффициентам при соответствующих степенях неизвестных. Обычно используют команды simplify() и factor().

Пример ПII.19. *Задание функции, применяемой к полученным коэффициентам*

```
> f:=a^3*x-x+a^3+a;
```

$$f := a^3\,x - x + a^3 + a$$

```
> collect(f,x);
```

$$(a^3-1)\,x + a^3 + a$$

```
> collect(f,x,factor);
> # разложение на множители коэффициентов при x
```

$$(a-1)\,(a^2+a+1)\,x + a\,(a^2+1)$$

```
> collect(p,[x,y],distributed,factor);
> # полином двух переменных
```

$$(1+a)\,x + (1-a)\,y\,x^2 - (a-1)\,(1+a)\,x\,y$$

```
> collect(p,[x,y],recursive,factor);
```

$$(1-a)\,y\,x^2 + (-(a-1)\,(1+a)\,y + 1 + a)\,x$$

II.5.7 Рационализация дробей: rationalize()

Под рационализацией дробей подразумевается избавление от иррациональности в знаменателе. Команда rationalize() и производит именно такое преобразование над числовыми и алгебраическими дробями. Причем, в последнем случае принимается во внимание только знаменатель в виде полинома. Эта команда может рационализировать алгебраическую дробь, знаменатель которой содержит трансцендентные функции типа sin(), exp(), ln(), и т.п. Однако, если их аргумент является дробью с иррациональностями в знаменателе, то эти конструкции не участвуют в процессе рационализации.

Пример ПII.20. *Рационализация дробных выражений*

```
> ex1:=2*(1+2^(1/3))/(2-sqrt(2));
```

$$ex1 := 2\,\frac{1+2^{(1/3)}}{2-\sqrt{2}}$$

```
> rationalize(ex1);
```

$$(1+2^{(1/3)})\,(2+\sqrt{2})$$

```
> [x/(x+sqrt(1+sqrt(3))),(x+y)/(x*y+sqrt(3)+sqrt(7))];
```

$$[\frac{x}{x+\sqrt{1+\sqrt{3}}},\ \frac{x+y}{x\,y+\sqrt{3}+\sqrt{7}}]$$

```
> rationalize(%);
```

$$[-\frac{x\,(-x+\sqrt{1+\sqrt{3}})\,(x^2-1+\sqrt{3})}{x^4-2\,x^2-2},\ \frac{(x+y)\,(-x\,y-\sqrt{7}+\sqrt{3})\,(-x^2\,y^2-4+2\,x\,y\,\sqrt{7})}{x^4\,y^4-20\,x^2\,y^2+16}]$$

```
> [(x+y)/(x+sqrt(y)),x*y/(x+sqrt(x+sqrt(3)))];
```

$$[\frac{x+y}{x+\sqrt{y}},\ \frac{x\,y}{x+\sqrt{x+\sqrt{3}}}]$$

```
> rationalize(%);
```

$$[-\frac{(x+y)\,(-x+\sqrt{y})}{x^2-y},\ -\frac{x\,y\,(-x+\sqrt{x+\sqrt{3}})\,(x^2-x+\sqrt{3})}{x^4-2\,x^3+x^2-3}]$$

```
> 1/(1+root(sin(1/(1-sqrt(eta))),3));
```

$$\frac{1}{1+\sin(\frac{1}{1-\sqrt{\eta}})^{(1/3)}}$$

```
> rationalize(%);
```

$$\frac{1-\sin(\frac{1}{1-\sqrt{\eta}})^{(1/3)}+\sin(\frac{1}{1-\sqrt{\eta}})^{(2/3)}}{1+\sin(\frac{1}{1-\sqrt{\eta}})}$$

II.5.8 Ограничения на неизвестные: assume()

Команда assume() накладывает ограничения на неизвестные величины Maple. Она имеет следующий синтаксис: assume(x, *свойство*);

Здесь x представляет любую неопределенную переменную Maple или выражение с такими переменными, а параметр *свойство* может принимать значения, равные названиям свойств (специальным символьным именам, зарезервированным системой Maple для задания разнообразных ограничений на переменную или выражение, определенные первым параметром), имени типа данных и числовому диапазону. Некоторые из перечисленных свойств перечислены в Табл.9

Таблица.9. Свойства числовых переменных и выражений

Название свойств	Описание
negative	Отрицательные вещественные числа из интервала $(-\infty, 0)$ (нуль не включается)
nonnegative	Неотрицательные вещественные числа из интервала $[0, -\infty)$ (нуль включается)
positive	Положительные вещественные числа из интервала $(0, \infty)$ (нуль не включается)
natural	Натуральные числа (целые, большие или равные 0)
posint	Целые строго большие 0
odd	Нечетные числа)
even	Четные числа
complex	Комплексные числа
NumeralNonZero	Комплексные числа, исключая 0
real	Вещественные числа
rational	Рациональные числа (дроби и целые)
irrational	Иррациональные числа
integer	Целые числа
fraction	Только дробные числа
prime	Простые числа

Пару параметров (x, *свойство*) можно заменить математическим отношением, если, конечно, это возможно. Например, (x, negative) соответствует отношению $x < 0$, (x, nonnegative) соответствует $x >= 0$ и т.д.

Если на переменную положены ограничения, то в результатах выполнения действий над выражениями, в которые входит эта переменная, сразу же за ее именем по умолчанию отображается символ тильда ($\sim$). Эту функциональность по умолчанию можно изменить на следующие:

- либо вообще не информировать пользователя, что на переменную наложены ограничения, и она будет продолжать отображаться как и все переменные без ограничений, (команда Options $\to$ Assumed Variables $\to$ No Annotation); [1]

- либо в области вывода, если отображаются результаты, в которых присутствует переменная с наложенными ограничениями, словесно сообщается, на какие переменные наложены ограничения (команда Options $\to$ Assumed Variables $\to$ Phrase).

[1] Выбирается на панели Maple. Заметим, что опции панели действуют на данную и все последующие операции, в том числе и на операцию экспорта файлов.

Пример ПII.21. *Способы отображения переменных с ограничениями*

```
> assume(a>0);
> ln(a^2); # Отображение по умолчанию
```

$$2\ln(a\tilde{})$$

```
> ln(a^2); # Режим не информирования пользователя
```

$$2\ln(a)$$

```
> ln(a^2); # Словесное сообщение
```

$$2\ln(a)$$
$$\text{with assumptions on } a$$

Команда assume() может получать несколько пар (x, *свойство*) или математических отношений в качестве своих параметров. В этом случае все заданные ограничения действуют одновременно. Поэтому наложение ограничений в виде
> assume(x>1,x<2);
соответствует тому, что переменная x может изменяться только в интервале (1,2).

Новое ограничение, накладываемое новой командой assume() на переменную, отменяет все предыдущие ограничения. Поэтому последовательное задание ограничений двумя командами:
> assume(x>1);
> assume(x<2);
соответствует предположению, что значение переменной x не превосходит числа 2, а не тому, что значение этой переменной должно лежать в интервале (1,2).

Если по ходу решения задачи необходимо постепенно добавлять ограничения на переменную, то можно использовать команду additionally(), параметры которой полностью соответствуют параметрам команды assume(). В этом случае ограничения, определенные командой additionally(), добавляются к ограничениям, введенным командой assume() и предыдущими командами additionally():

```
> assume(x>1); # В последующих выражениях предполагается x>1
                 (какие-то вычисления)
> additionally(x<=2); # Теперь предполагается, что 1<x<=2
```

Для снятия всех наложенных ранее на переменную предположений следует этой переменной просто присвоить ее же символьное имя (имя переменной, заключенное в одинарные кавычки). Чтобы снять все ограничения для переменной x предыдущих примеров, следует просто выполнить следующую операцию присваивания:
>x:='x';
Однако, если переменная с наложенными ограничениями использовалась в выражениях, то простое присваивание имени переменной самой переменной не снимает ограничения на переменную в этих выражениях. Пример (ПII.22) иллюстрирует подобную ситуацию.

Пример ПII.22. *Снятие ограничений с переменной*

```
>assume(a>0);
>g:=sqrt(a^2);
                                  g:=a~
>a:='a': a;
                                      a
>g;
                                      a~
```

Как видим, снятие всех наложенных на переменную a ограничений не снимает, однако, этих ограничений с переменной a в выражении g. Чтобы снять ограничения с этой переменной, следует до команды снятия ограничений с переменной воспользоваться командой подстановки subs() и первым параметром указать замену переменной a на ее символьное имя 'a'.

Пример ПIII.23. *Снятие ограничений с переменной в выражении*

```
> assume(a>0);
> g:=sqrt(a^4);
```

$$g := a^{\sim 2}$$

```
> g;
```

$$a^{\sim 2}$$

```
> g:=subs(a='a',g);
```

$$g := a^2$$

```
> a:='a';
```

$$a := a$$

```
> g;
```

$$a^2$$

С помощью функции is() можно определить, удовлетворяет ли некоторая переменная рабочего листа определенному свойству. Эта функция возвращает значение true, если все возможные значения переменной соответствуют заданному свойству. Если хотя бы одно из возможных значений не соответствует заданному свойству, то функция is() возвращает false. Эта функция может возвратить значение FALL, которое информирует пользователя, что невозможно определить, соответствует или нет заданная переменная заданному свойству. Это может произойти либо в результате недостаточности информации относительно ограничений на переменную, либо невозможности вычислить логические ограничения на переменную.

Пример ПIII.24. *Удовлетворяет ли переменная заданным ограничениям*

```
> assume(a>0);
> is(a>0);
```

$$true$$

```
> is(a<1);
```

$$false$$

```
> additionally(a<1);
> is(a<1);
```

$$true$$

Функция coulditbe() проверяет, может ли заданная переменная соответствовать заданному свойству. Она возвращает true, если хотя бы одно из возможных значений переменной может иметь заданное свойство, и false в противном случае. Смысл значения FALL соответствует такому же значению для функции is().

Пример ПII.25. *Может ли переменная удовлетворять заданным ограничениям*

```
> assume(a>0);
> is(a>0);
```

$$true$$

```
> coulditbe(a=1);
```

$$true$$

```
> additionally(a<1);
> coulditbe(a=1);
```

$$false$$

Команда about() отображает информацию о наложенных ограничениях на неизвестную величину:

```
> about(a);
Originally a, renamed a~:

  is assumed to be: RealRange(Open(0),Open(1))
```

Многие функции и команды Maple используют информацию о наложенных на неизвестную величину ограничениях при выполнении символьных вычислений. Например, Maple не может вычислить следующий предел из-за неизвестности знака символьной переменной a:

```
> int(exp(a*x),x=0..infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{(a\,x)} - 1}{a}$$

Стоит задать предположение о строгой положительности параметра a, и Maple тут же вычислит данный интеграл, который он свел к вычислению предела, зависящего от параметра:

```
> assume(a>0);
> int(exp(a*x),x=0..infinity);
```

$$\infty$$

II.5.9 Структура выражений и их вычисление

Для полноценного понимания функционирования системы аналитических вычислений, включая хранимую структуру выражений, нам необходимо познакомиться с основными типами объектов, кроме чисел и строк, с которыми работает Maple.

В отличии от чисел - простых объектов - объекты других типов с которыми может работать Maple, представляют собой сложные типы данных, образуемые с помощью специальных синтаксических конструкций из выражений Maple (последовательность, список, множество) или обращением к специальной функции-конструктору (массив, таблица).

Последовательность выражений

Последовательность выражений, или просто *последовательность* - эта группа выражений Maple, разделенных запятыми.

Пример ПI.26. *Последовательности выражений*

```
> s1:=1,2,sqrt(3),x;
```

$$s1 := 1,\ 2,\ \sqrt{3},\ x$$

```
> s2:=x^2,ln(x)+4,x*y;
```

$$s2 := x^2,\ \ln(x)+4,\ x\,y$$

```
> s3:=1,1,x,1,x,2;
```

$$s3 := 1,\ 1,\ x,\ 1,\ x,\ 2$$

```
> whattype(s2);
```

$$exprseq$$

Последовательность является самостоятельным объектом, не имеющего ничего общего с внешне похожими на него списками и множествами. Скажем так: этот объект является базовым объектом Maple, на основе которого строятся другие сложные объекты. Он обладает присущими ему свойствами: сохраняет порядок следования выражений. Это означает, если мы определили например, последовательность s1 с первым элементом, равным целой величине 1, то в этой последовательности (если мы ее, конечно, не изменим) этот элемент всегда будет первым. Последовательность может содержать и повторяющиеся элементы, расположенные в произвольном порядке внутри последовательности (s3 в примере (ПI.26)). Последняя команда этого примера определяет тип объекта, заданного в качестве его параметра. Для последовательности ее тип имеет имя exprseq (сокращение от expression sequence).

Если этот тип данных передается в качестве параметра функции Maple, то каждый его элемент рассматривается как соответствующий параметр функции. Для многих операций Maple использование в качестве одного из операндов последовательности приводит к выполнению этой операции для каждого ее элемента в качестве соответствующего операнда и формирования результирующей последовательности. Использование последовательности переменных в левой части операции присваивания и последовательности значений в правой приводит к множественному присваиванию с помощью одной операции. Все эти возможности показаны в примере (ПII.27).

Пример ПII.27. *Операции с последовательностями*

```
> s1:=sin(x)*x^2,x;
```

$$s1 := \sin(x)\,x^2,\ x$$

```
> int(s1);
```

$$-x^2\cos(x) + 2\cos(x) + 2\,x\sin(x)$$

```
> s2:=1,2,3;
```

$$s2 := 1,\ 2,\ 3$$

```
> s3:=y||s2;
```

$$s3 := y1,\ y2,\ y3$$

```
> f,g,h:=s2;
```

$$f,\ g,\ h := 1,\ 2,\ 3$$

```
> f;
```

$$1$$

Последовательность можно считать, как последовательность выражений, перенумерованных натуральными числами, начиная с единицы: первый элемент индекс 1, второй - 2 и т.д. В связи с этим можно получить значение любого элемента последовательности, используя индексную форму записи - после имени переменной в квадратных скобках задать индекс элемента:

```
> s:=x,x^2,x^3;
```

$$s := x,\ x^2,\ x^3$$

```
> s[2];
```

$$x^2$$

Однако присвоить новое значение элементу последовательности с использованием индексной формы обращения нельзя:

```
> s[2]:=x^2(-2);

Error, cannot assign to an expression sequence
```

Для создания длинных последовательностей, элементы которых подчиняются некоей закономерности, можно использовать команду seq() и операцию повторения s. Команда seq() имеет две формы:
seq(f,i=m..n);
seq(f,i=x);
В них f - выражение, зависящее от переменной, имя которой определяется параметром i, m и n - числа, определяющие диапазон изменения переменной i с шагом 1, а x может быть списком, множеством, суммой, произведением или строкой. В последнем случае переменная i последовательно применяет значения, равные символам строки.

Пример ПII.28. *Формирование последовательностей командой seq()*

```
> seq( sin(Pi*i/6), i=0..6);
```

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0$$

```
> seq(x[k],k=3..5);
```

$$x_3, x_4, x_5$$

```
> seq(cat(k,"1"),k="string");
```

"s1", "t1", "r1", "i1", "n1", "g1"

Операция повторения $ может быть унарной и бинарной. В первом случае она применяется к диапазону m..n, где m и n - числа, а во втором случае первым операндом является выражение, зависящее от переменной, которая указана во втором операнде, содержащем также операцию диапазон. Все случаи ее использования показаны в примере (ПII.29)

Пример ПII.29. *Формирование последовательностей операцией $*

```
> $ 2..5;
```

2, 3, 4, 5

```
> i^2 $ i=2/3..8/3;
```

$$\frac{4}{9}, \frac{25}{9}, \frac{64}{9}$$

```
> a[i] $ i = 1..3;
```

$$a_1, a_2, a_3$$

```
> x$4;
```

$$x, x, x, x$$

Списки и множества

Список - упорядоченная последовательность выражений, заключенная в квадратные скобки, а *множество* - неупорядоченная последовательность выражений, заключенная в фигурные скобки. Относительно множество следует отметить, что этот объект понимается в Maple точно так же как и в математике. Если в последовательности присутствуют повторяющиеся элементы, то в множестве им будет соответствовать один элемент, тогда как в списке все повторяющиеся элементы существенны, т.е. список может содержать повторяющиеся элементы, стоящие на разных местах. При задании множества порядок элементов не существен, главное, чтобы в последовательности присутствовали все элементы, образующие множество.

Пример ПII.30. *Задание списков и множеств*

```
> [a,b,c],[a,c,b],[a,a,c,c,b,a];
> # Задание разных списков
```

$$[a, b, c], [a, c, b], [a, a, c, c, b, a]$$

```
> {a,b,c},{a,c,b},{a,a,c,c,b,a};
> # Задание одинаковых множеств
```

$$\{a, b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\}$$

Списки, как и последовательности, сохраняют порядок своих элементов, поэтому с помощью индекса можно получить значение любого элемента списка, что, впрочем, справедливо и для множества. Более того, индексной форме элемента списка можно присвоить новое значение, изменив тем самым значение соответствующего элемента списка.Подобная техника не проходит для элементов множества.

Пример ПII.31. *Получение и изменение значений элементов списка и множества*

```
> l:=[a,b,c];
```

$$l := [a, b, c]$$

```
> l[2];
```

$$b$$

```
> l[3]:=3; l;
```

$$l_3 := 3$$
$$[a, b, 3]$$

```
> s:={a,a,c,c,b,a};
```

$$s := \{a, b, c\}$$

```
> s[2];
```

$$b$$

```
> s[3]:=3; s;

Error, cannot assign to a set
```

$$\{a, b, c\}$$

При выборе нескольких элементов списка или множества с помощью индекса можно использовать объект диапазона, причем в этом случае положительные значения индекса соответствуют отсчету элементов в списке или множестве слева направо, а отрицательные значения соответствуют отсчету справа налево. Например, если неизвестно количество членов в списке a, то все их можно выбрать командой:
> s[1..-1];
Вообще, при выборе элементов с помощью индекса его значение, равное -1, соответствует последнему элементу списка, -2 соответствует предпоследнему и т.д.

Чтобы изменить элемент множества, его следует удалить операцией minus, а затем добавить новый элемент операцией union, семантика которых соответствует их аналогам в математике: разности и объединению. Кроме этих двух операций в Maple реализована операция пересечения двух множеств intersect.

Пример ПII.32. *Операции со множествами*

```
> ({a,b,c} minus {c}) union{3};
```

$$\{3,\, a,\, b\}$$

```
> {a,b,c} intersect {b,c,d};
```

$$\{b,\, c\}$$

Узнать, является ли некоторое выражение элементом списка или множества, можно командой member(), первым параметром которой следует задать проверяемое выражение, а вторым - имя переменной, в которой хранится список или множество:

```
> s:={x^2,x^(-2),x,1/x};
```

$$s := \{\frac{1}{x},\, x,\, x^2,\, \frac{1}{x^2}\}$$

```
> member(x^(-1),s);
```

$$true$$

```
> member(1,s);
```

$$false$$

Массивы и таблицы

Массив является дальнейшим развитием списка. Если список можно представить как перенумерованную последовательность, индекс которой может принимать только положительные значения, причем нумерация начинается с единицы, то в массиве каждый элемент также связан с индексом, однако не ограничен одной размерностью. Массив может иметь много размерностей, каждую со своим индексом. Более того, изменение индекса не ограничено положительными целыми значениями, его величина может быть как отрицательным целым, так и нулем. Для объявления массива следует использовать функцию array() в правой части операции присваивания. Переменная в левой части будет представлять вновь созданный массив. Синтаксис функции создания массива следующий:
array(*индексная _ функция*, границы, список)
Параметр *индексная _ функция* должен быть именем процедуры, задающей, каким образом выполняется индексация (встроенные значения symmetric, antisymmetric, sparse, diagonal и identity позволяют задать симметричную, кососимметричную, разреженную, диагональную и единичную матрицы, см. страницы Справки, отображаемой командой ?indexfcn). Параметр *границы* представляет диапазон(ы) изменения индекса(ов) массива. Если массив многомерный, то соответствующие диапазоны должны задаваться подряд через запятую. Значения элементов массива задаются параметром *список*, причем для двумерного массива элементами списка являются списки, содержащие значения соответствующих строк массива, т.е. этот параметр является списком списков. Для массивов большей размерности он представляет собой вложенные списки с глубиной, равной количеству размерностей. Все параметры этой функции являются не обязательными, однако, либо параметр, задающий границы, либо список значений должен обязательно присутствовать.

Если значения элементов массива не заданы, то с использованием индексной формы можно присвоить элементам массива соответствующие значения, причем в квадратных скобках следует задавать список индексов, соответствующих элементу, которому присваивается значение. Сразу же отметим, что когда создан массив и его элементам присвоены значения, то простой набор в области ввода рабочего листа имени массива не приведет к отображению его содержимого, а будет всего лишь напечатано имя массива. Для отображения в области вывода значений элементов массива следует воспользоваться командой print(), которая отображает в области вывода (не на принтере) содержимое объекта, заданного в качестве ее параметра.

Пример III.33. *Задание массивов*

```
> ar:=array(1..3);
```

$$ar := \mathrm{array}(1..3, [])$$

```
> ar[1]:=1: ar[2]:=2: ar[3]:=3:
> print(ar);
```

$$[1, 2, 3]$$

```
> ar0:=array(2..3,[2,3]);
```

$$\begin{array}{l} ar0 := \mathrm{array}(2..3, [\\ (2) = 2 \\ (3) = 3 \\ ]) \end{array}$$

```
> ar1:=array([[1,2],[2,1]]);
```

$$ar1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ar1[2,2]:=3; print(ar1);
```

$$ar1_{2,2} := 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Обратите внимание, каким образом печатается массив, у которого индексы изменяются не от 1 и далее (массив ar0).

Таблица является дальнейшим развитием массива, как структуры данных. В ней в качестве индекса можно использовать не только целые числа, а все, что угодно. Для создания таблицы используется функция table(), параметрами которой являются индексная функция и список или множество пар *индекс=значение*.

Пример III.34. *Задание таблицы*

```
> t:=table([one=1,two=2]);
```

$$t := \mathrm{table}([one = 1,\ two = 2])$$

```
> t[two];
```

$$2$$

Таблицы достаточно удобный объект, когда надо в одном 'массиве' хранить данные, относящиеся к какому-либо реальному объекту, и ссылаться к ним по индексам, представляющим естественную запись их наименований. Приведем в качестве примера таблицу, содержащую данные по физико-математическим характеристикам стали:

```
> steel:=table([mass=[7.8*10^3,kg/m^3], elastisity=[2.1*10^5,MPa]]);
```

$$steel := \mathrm{table}([mass = [7800.0, \frac{kg}{m^3}],\ elastisity = [210000.0,\ MPa]])$$

```
> steel[elastisity];
```

$$[210000.0,\ MPa]$$

II.5.10 Структура выражений и работа с ней

Преобразуя алгебраические выражения в Maple, пользователь в основном оперирует ими как математическими объектами: извлекает корни, возводит в степени, вычисляет интегралы и производные и т.п. Однако часто возникает необходимость выделить из выражения его часть и именно с ней произвести некоторые преобразования, или заменить ее на некоторое другое выражение. В таких случаях взгляд на алгебраические выражения, как математические объекты, не приносит никаких результатов, а вот знание структуры выражения, или как оно хранится и обрабатывается в системе Maple, т.е. внутреннее представление выражений, поможет в решении специфических задач преобразования выражений. В случае специфических выражений, состоящих только из списков или множеств, задача манипулирования их элементами достаточно проста и рассмотрена нами, а вот как хранятся и каким образом можно получить доступ к составляющим частям общих алгебраических выражений - это задача более серьезная. Именно эти вопросы и будем рассматривать в данном разделе.

Структурная обработка списков, множеств и полиномов

Часто возникает необходимость выполнить какую-либо команду или вычислить функцию применительно к каждому элементу списка или множества. Можно, конечно, это сделать поочередно выбирая элементы и применяя к каждому из них последовательно команду или функцию. Такой способ не совсем удобен, так как необходимо знать количество элементов в списке или множестве, да и к тому же уметь организовывать циклические вычисления. Разработчики Maple, предвидя подобные задачи, разработали несколько команд, действие которых распространяется на каждый элемент списка или множества, а не на весь список или множество как единое целое.

Команды map() и map2() позволяют применить функцию или команду, заданную первым параметром, ко всем элементам списка или множества, возвращая, соответственно, список или множество. Их общий синтаксис имеет вид:
map(*функция*, *список* | *множество* [, *пар*2, *пар*3, ... *пар*N]);
map2(*функция*, *пар*1, *список* | *множество* [, *пар*3, ... *пар*N]);
Если для выполнения команды или функции, заданной первым параметром команды map(), необходимы дополнительные параметры, то их следует задавать после списка или

множества. Команда map2() отличается от команды map() тем, что элементы списка или множества передаются в качестве второго параметра команды или функции, определенной первым параметром.

Пример III.35. *Выполнение команд над элементами списка или множества*

```
> map(int, [x,x^2,x^3], x);
```

$$[\frac{1}{2}x^2,\ \frac{1}{3}x^3,\ \frac{1}{4}x^4]$$

```
> map(x->x^a, {x,y,z});
```

$$\{z^a,\ x^a,\ y^a\}$$

```
> map2(diff,x^y/ln(z), [x,y,z]);
```

$$[\frac{x^y\,y}{x\ln(z)},\ \frac{x^y\ln(x)}{\ln(z)},\ -\frac{x^y}{\ln(z)^2\,z}]$$

Нам известна команда seq() формирования последовательности, которая также поэлементно обрабатывает список или множество:

```
> seq(sin(i),i=[x,y,z]);
```

$$\sin(x),\ \sin(y),\ \sin(z)$$

В Maple существуют еще две похожих на нее команды add() и mul(). Первая формирует сумму, а вторая - произведение элементов списка или множества:

```
> add(sin(i),i=[x,y,z]);
```

$$\sin(x)+\sin(y)+\sin(z)$$

```
> mul(sin(i),i=[x,y,z]);
```

$$\sin(x)\sin(y)\sin(z)$$

Мы умеем выбирать элементы списка или множества с помощью индекса. Maple позволяет выбрать элементы, удовлетворяющие некоторому условию. Для этого следует прежде всего определить функцию, результатом выполнения которой будет булево значение true или false, в зависимости от того, истинно или нет некоторое определенное в ней условие. Например, следующая функция sq() возвращает булево значение true, если квадрат ее аргумента больше 1:

```
> sq:=x->is(x^2>1);
```

$$sq := x \to \mathrm{is}(1 < x^2)$$

Теперь можно воспользоваться командой select(), передав ей в качестве параметра имя булевой функции sq, а вторым параметром задать список/множество, из которых будут выбраны элементы, квадраты которых больше 1, и представлены в виде списка/множества:

```
> l:=[1,Pi,exp(1),0];
```

$$l := [1,\ \pi,\ e,\ 0]$$

```
> select(sq,l);
```

$$[\pi,\ e]$$

Действие команды remove() противоположно действию команды select(). Она возвращает список/множество, состоящий из элементов, не удовлетворяющих условию булевой функции, имя которой определено первым параметром, из списка/множества, заданного вторым параметром:

```
> remove(sq,l);
```

$$[1,\ 0]$$

Выполнить две операции одновременно позволяет функция selectremove(), которая возвращает последовательность двух списков, первый из которых представляет результат выполнения команды select(), а второй - команды remove():

```
> selectremove(sq,l);
```

$$[\pi,\ e],\ [1,\ 0]$$

Использованная нами в примерах функция была без дополнительных параметров: только элементы списка/множества передавались этой функции в качестве единственного параметра. Если для булевой функции необходимы дополнительные параметры, то они задаются во всех трех представленных функциях после списка/множества. Так, можно было бы не создавать собственную функцию sq(), а воспользоваться непосредственно функцией is():

```
> select(is,l,RealRange(Open(1),infinity));
```

$$[\pi,\ e]$$

Точно так же можно выбрать с помощью функции type() (ее вторым параметром задается тип Maple) все числа из списка l:

```
> select(type,l,numeric);
```

$$[1,\ 0]$$

Линейное объединение двух списков можно реализовать с помощью команды op(), которая возвращает последовательность элементов списка, переданного ей в качестве параметра, и квадратных скобок, формирующих список из последовательности:

```
> sl:=[Pi,exp(1)];s2:=[0,1];
```

$$sl := [\pi,\ e]$$

$$s2 := [0,\ 1]$$

```
> s:=[op(s1),op(s2)];
```

$$s := [s1,\ 0,\ 1]$$

Более сложные объединения списков реализуются командой zip(), имеющий следующий синтаксис:

zip(*бинарная_ функция*, *список*1, *список*2 [, *значение*]);
Семантика этой команды такова: бинарная (двух аргументов) функция выполняется, последовательно используя в качестве своих параметров элементы двух списков, формируя новый список из вычисленных значений. Длина полученного списка равна длине наименьшего из двух списков, переданных этой команде в качестве параметров, если не задан четвертый необязательный параметр. В случае его задания он используется в качестве элементов списка наименьшей длины при продолжении последовательного выбора элементов списка большой длины. Таким образом, в этом случае команда zip() формирует список, длина которого равна длине наибольшего списка/параметра.

Пример III.36. *Объединение списков*

```
> zip(gcd,[0,14,8],[2,6,12]);
> # функция gcd()  вычисляет наибольший общий делитель своих
> # аргументов
```

$$[2, 2, 4]$$

```
> zip((x,y)->+y,[1,2,3],[4,5,6]);
```

$$[4, 5, 6]$$

```
> zip((x,y)->x+y,[1,2,3],[4,5],0);
```

$$[5, 7, 3]$$

Списки и полиномы сохраняют порядок следования, соответственно своих элементов и членов с момента их создания именно так, как пользователь их задавал. Иногда возникает задача перестроить их таким образом, чтобы элементы или члены шли в некотором специальном порядке. Для этого в Maple существует команда sort(), которая упорядочивает элементы списка в возрастающем порядке, а члены полинома в убывающем порядке относительно степеней его переменной. Если список содержит только числовые элементы, то используется обычное числовое упорядочивание; если список содержит только строковые элементы или символьные имена, то упорядочивание осуществляется с использованием лексикографического упорядочивания; если список содержит смешанные элементы (числа, строки и алгебраические выражения), то упорядочивание происходит по адресам памяти, в которых располагаются его элементы. (В этом последнем случае результаты сортировки могут меняться от сеанса к сеансу.)

Пример III.37. *Простая сортировка списков и полиномов*

```
> sort([c,al,a,"b"]);
```

$$[a,\ al,\ \text{“b”},\ c]$$

```
> sort([2,4,7,-2,10]);
```

$$[-2, 2, 4, 7, 10]$$

```
> sort([c,al,a,"b","b23"]);
```

$$[a,\ al,\ \text{“b”},\ \text{“b23”},\ c]$$

```
> sort([34,x^2,c,"78x"]);
```

$$[34,\ x^2,\ c,\ \text{“78x”}]$$

```
> p:=x^2+a*x+a^2+b^2+x^4;
```

$$p := x^2 + a\,x + a^2 + b^2 + x^4$$

```
> sort(p);
```

$$x^4 + x^2 + x\,a + a^2 + b^2$$

Вторым параметром команды sort() можно задать булеву функцию, определяющую алгоритм упорядочивания элементов списка, или некоторые специальные значения для изменения алгоритма упорядочивания числовых, строковых или символьных списков, используемого по умолчанию. Символ ‘<‘ (именно в обратных кавычках) и numeric соответствуют упорядочиванию числового списка в возрастающем порядке, а символ ‘>‘ - в убывающем порядке. Для строкового или символьного списка значения lexorder или string вызывают упорядочивание списка с использованием лексикографического порядка. Значение address соответствует упорядочиванию любого списка в соответствии с адресами областей памяти, в которых расположены элементы списка.

Пример ПI.38. *Сортировка списков в соответствии с заданным алгоритмом*

```
> sort([1/2,3/4,1/7,5/2],(x,y)->evalb(denom(x)<denom(y)));
```

$$[\frac{5}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{7}]$$

```
> sort([2,4,7,-2,10],‘>‘);
```

$$[10,\ 7,\ 4,\ 2,\ -2]$$

При работе с полиномами очень часто необходимо выделить коэффициент при соответствующей степени переменной. Команда coeff() позволяет выполнить эту работу:

```
> p:=z^2*5+a+b+z^2*(a^2+b)+x*6/7;
```

$$p := 5\,z^2 + a + b + z^2\,(a^2 + b) + \frac{6}{7}\,x$$

```
> coeff(p,z^2);
```

$$5 + a^2 + b$$

II.5.11 Внутренняя структура выражений

Каждое алгебраическое выражение хранится системой Maple в виде древовидной структуры, обеспечивая тем самым доступ к любому ее члену или подвыражению, а также позволяя выполнять над ним разнообразные символьные преобразования. В представлении этой структуры каждый объект Maple, в том числе и выражение, делится на подобъекты первого уровня, которые, в свою очередь также делятся на подобъекты и т.д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут получены базисные простые элементы Maple (объекты основных типов: целые, вещественные, дроби, неизвестные величины и т.д.) Рассмотрим несколько команд, позволяющих выделять части таких объектов, как уравнение, диапазон и дробь, в том числе алгебраическая.

Уравнение представляется в виде двух выражений, соединенных знаком равенства. Его не следует путать с операцией присваивания (:=), которая переменной в левой части присваивает значение выражения в правой части. Уравнение является объектом Maple и служит для задания действительных математических уравнений. Его можно использовать в правой части операции присваивания, именуя тем самым уравнение. Для выделения левой части уравнения предназначена команда lhs(). Выделить его правую часть можно командой rhs().

Пример ПII.39. *Задания уравнения и выделение его частей*

```
> x^2+sin(x)=cos(x)-1;
```

$$x^2 + \sin(x) = \cos(x) - 1$$

```
> eq:=m*v^2/2+m*g*h=C;
```

$$eq := \frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, h = C$$

```
> rhs(%%);
```

$$\cos(x) - 1$$

```
> lhs(eq);
```

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, h$$

Эти же команды работают и с объектом диапазон, выделяя его начало и конец:

```
> lhs(4..8);
```

$$4$$

```
> rhs(4..8);
```

$$8$$

Для выделения числителя и знаменателя числовой или алгебраической дроби служат команды, соответственно, numer() и denom(), причем перед выделением этих частей дробей Maple осуществляет их упрощение, приводя к нормальной форме.

Пример ПII.40. *Выделение числителя и знаменателя дроби*

```
> afrac:=(sin(x)+x/y)/(cos(x)/sin(x)+2);
```

$$afrac := \frac{\sin(x) + \dfrac{x}{y}}{\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + 2}$$

```
> numer(afrac);
```

$$(\sin(x)\, y + x) \sin(x)$$

```
> denom(afrac);
```

$$y\,(\cos(x) + 2\sin(x))$$

```
> numer(4/5/6*34/7);
```

$$68$$

```
> denom(4/5/6*34/7);
```

$$105$$

Теперь обратимся к общему алгебраическому выражению и посмотрим, каким образом можно получить в Maple доступ к его структурному представлению через базовые элементы. Рассмотрим выражение:

```
> expr:=x^7/sin(x)+8*x^5+3*sqrt(x)*sin(x);
```

$$expr := \frac{x^7}{\sin(x)} + 8\,x^5 + 3\,\sqrt{x}\,\sin(x)$$

Воспользуемся командой whattype(), которая скажет нам, какой тип имеет наше выражение: >whattype(expr);
Как видим, наше выражение представляет собой сумму. Посмотрим теперь, что представляют собой члены этой суммы, или, по принятой в Maple терминологии, *операнды выражения.* Команда nops(*выражение*) определяет количество операндов выражения, а команда op(*выражение*) выдает их в виде последовательности выражений. Эта же команда позволяет извлечь конкретный операнд выражения, указав в качестве первого параметра его порядковый номер.

```
> nops(expr);
```

$$3$$

```
> cp(expr);
```

$$\mathrm{cp}(\frac{x^7}{\sin(x)} + 8\,x^5 + 3\,\sqrt{x}\,\sin(x))$$

```
> op3:=op(3,expr);
```

$$op3 := 3\,\sqrt{x}\,\sin(x)$$

Выделенный третий операнд, как и предыдущие, является выражением, представляющим произведение трех членов. Используя функции whattype(), nops() и op(), мы точно также можем исследовать структуру третьего операнда:

```
> whattype(op3);
```

$$*$$

```
> nops(op3);
```

$$3$$

```
> op(op3);
```

$$3,\ \sqrt{x},\ \sin(x)$$

```
> op3_2:=op(2,op3);
```

$$op3\_2 := \sqrt{x}$$

Второй операнд третьего операнда нашего выражения является степенным выражением, имеющим два операнда, первый из которых является неизвестной величиной (тип symbol), а второй - дробь (тип fraction), которая, в свою очередь, имеет два целых операнда (тир integer):

```
> whattype(op3_2);
```

$$\char`\^$$

```
> op(op3_2);
```

$$x, \frac{1}{2}$$

```
> op3_2_1:=op(1,op3_2);
```

$$op3\_2\_1 := x$$

```
> whattype(op3_2_1);
```

$$symbol$$

```
> op3_2_2:=op(2,op3_2);
```

$$op3\_2\_2 := \frac{1}{2}$$

```
> whattype(op3_2_2);
```

$$fraction$$

```
> op(op3_2_2);
```

$$1, 2$$

```
> whattype(%[1]); whattype(%[2]);
```

$$integer$$
$$indexed$$

Таким образом, исследуя только один операнд исходного выражения, мы дошли до операндов базовых типов symbol и integer, которые являются простыми и представляют самих себя. Исследование других операндов также завершится приходом к базовым простым типам. Суммируя проделанную работу по выявлению операндов разных уровней исходного выражения, его можно представить в виде дерева выражения, в узлах которого располагаются типы выражений и подвыражений, а а ветви представляют соответствующие их операнды.

Операндами списка или множества являются его элементы:

```
> op([1,4,6,8]);
```

$$1, 4, 6, 8$$

```
> op({x^2,x^3});
```

$$x^2, x^3$$

Другие структуированные объекты (массивы, таблицы, матрицы, векторы) имеют более сложное внутреннее представление Maple и не представляются таким простым одноуровневым деревом, как списки и множества.

Ранее, рассказывая о командах, выделяющих элементы из списка/множества (select(), remove()), или команде map(), применявшей функции последовательно ко всем элементам списка/множества, мы отмечали, что они работают с общими алгебраическими выражениями. Действительно, семантика этих команд остается такой же, как и при работе со списками/множествами, но в отличии от использования в них упомянутых объектов, представлявших свои элементы для выполнения последовательности однотипных действий, при использовании алгебраических выражений итерации осуществляются по операндам этих выражений. Например, следующая команда map() вычислит квадрат каждого операнда выражения и возвратит результат в виде исходного выражения, но с другими операндами:

```
> map(x->x^2,y^n);
```

$$(y^2)^{(n^2)}$$

В выражении этого примера, имеющем экспоненциальный тип ^, два оператора y и n, каждый из которых возводится в квадрат, а потом измененный первый операнд возводится в степень измененного второго операнда. Аналогичным образом работают и команды select() и remove():

```
> l:=x->evalb(is(x<0)=true);
```

$$l := x \to \mathrm{evalb}(\mathrm{is}(x < 0) = \mathit{true})$$

```
> select(l,sin(x)-5-cos(x)-x^2);
```

$$-5$$

```
> remove(type,sin(x)-5-cos(x),function);
```

$$-5 - \cos(x)$$

Команда remove(), казалось бы, должна удалить все функции из выражения. Однако этого не произошло. Эта команда в нашем примере должна удалить из выражения все операнды, имеющие тип function. Проверим, какой тип имеет последний третий операнд:

```
> whattype(op(3,sin(x)-5-cos(x)));
```

$$*$$

```
> op(op(3,sin(x)-5-cos(x)));
```

$$-1, \cos(x)$$

Оказывается, тип третьего операнда произведение *, а не функция, как мы думали, поэтому-то член cos(x) и не был удален из выражения. Дело в том, что тип всего выражения сумма +, и поэтому тип третьего операнда не функция, а произведение, так как функцию cos(x) следует умножить на -1. Maple предполагает большое количество булевых функций, которые можно использовать в командах select() и remove() для работы со структурой выражений. Мы только расскажем об их небольшом числе, остальные можно найти в справочной системе Maple.

Команда has() определяет, содержится ли некоторое подвыражение в заданном выражении.

Пример III.41. *Функция has()*

```
> has(x*esp(cos(x+2)),x+2);
```

$$true$$

```
> has(x*exp(cos(x+2)),cos);
```

$$true$$

```
> select(has,cos(x)+sin(x)+cos(2*x)*sin(x),cos);
```

$$\cos(x) + \cos(2\,x)\sin(x)$$

```
> remove(has,exp(cos(x))+sin(x)+cos(2*x)*sin(x)+exp(x+y),exp);
```

$$\sin(x) + \cos(2\,x)\sin(x)$$

Команда has() понимает только те подвыражения, которые могут быть определены с помощью команды op() при разборе структуры выражения. Поэтому, если необходимо выделить из выражения только члены, содержащие некоторую функцию, то в команде has() следует задавать лишь имя этой функции, как показано в примере (ПII.41)

Команда hastype() определяет, содержит ли выражение подвыражения заданного типа:

```
> select(hastype,exp(cos(x))+sin(x)+cos(2*x)*sin(x)+exp(x*y), `*`);
```

$$\cos(2\,x)\sin(x) + e^{(x\,y)}$$

```
> select(hastype,exp(cos(x))+sin(x)+cos(2*x)*sin(x)+exp(x*y), `+`);
```

$$0$$

Обратите внимание, если в выражении не найдено ни одно подвыражение заданного типа, то функция select() возвращает 0.

Если необходимо выделить из выражения ни операнды, содержащие подвыражения заданного типа, а сами подвыражения, то следует использовать команду indets(), вторым параметром которой задается тип подвыражения:

```
> indets(exp(cos(x))+sin(x)+cos(2*x)*sin(x)+exp(x*y), `*`);
```

$$\{\cos(2\,x)\sin(x),\ x\,y,\ 2\,x\}$$

Эта функция возвращает в виде множества все подвыражения указанного типа.

Не все подвыражения можно выделить, используя только типы данных поддерживаемые Maple. Дело в том, что некоторые, встречающиеся в математике операторы, не имеют соответствующего типа. Например, операция дифференцирования. В этом случае следует использовать вместо типа Maple специальную функцию specfunc(type,name), которая связывает имя оператора name с типом type. Следующий пример, демонстрирует выделение из выражения членов с операцией дифференцирования:

```
> DE:=expand(diff(sin(y(t))*t^2,t));
```

$$DE := \cos(\mathrm{y}(t))\,(\tfrac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t))\,t^2 + 2\sin(\mathrm{y}(t))\,t$$

```
> select(hastype,DE,specfunc(anything,diff));
```

$$\cos(\mathrm{y}(t))\,(\tfrac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t))\,t^2$$

Подстановка и преобразование типов

При выполнении математических преобразований часто необходимо произвести замену переменных в выражении, функции, уравнении и т.д, то есть вместо какой-то переменной подставить ее представление через некоторые другие переменные. Для этих целей в Maple существует команда subs(), синтаксис которой имеет следующий вид:
subs(*старое_ выражение= новое_ выражение*, *выражение*);
subs(sl,... sn, *выражение*);
Во второй форме этой команды каждое из sl,...,sn является уравнением или списком/множеством уравнений.

Первая форма команды анализирует *выражение*, выделяет в нем все вхождения *старое_ выражение* и подставляет вместо них *новое_выражение*. Вторая форма позволяет выполнить серию подстановок в *выражение*. Подстановки выполняются последовательно, начиная с sl. Это означает, что после выполнения первой подстановки, определенной уравнением sl, Maple отыскивает вхождения левой части уравнения s2 во вновь полученном выражении и заменяет каждое такое вхождение на выражение, заданное в левой части уравнения s2. Если подстановки заданы в виде списка или множества уравнений, то они выполняются одновременно, т.е. вхождения выражений, заданных в левых частях уравнений, определяются в исходном параметре *выражение*. Например, после выполнения подстановки subs(x=y, y=x, [x,y]) исходный список [x,y] будет преобразован в [x,x], тогда как при использовании команды subs({x=y, y=x}, [x,y]) переменные x и y в списке поменяются местами: список будет иметь вид [y,x].

Пример ПI.42. *Подстановки в выражении*

```
> ex:=cos(x)+cos(x)^(1/3);
```

$$ex := \cos(x) + \cos(x)^{(1/3)}$$

```
> subs(cos(x)=27,ex);
```

$$27 + 27^{(1/3)}$$

```
> exl:=s^3;
```

$$exl := s^3$$

```
> subs(s^2=1-c^2,exl);
```

$$s^3$$

Последняя команда подстановки subs() в примере (ПI.42) не подставила в выражение s^3 вместо s^2 выражение $1 - c^2$. Дело в том, что эта команда осуществляет замену, только если левая часть уравнения подстановки совпадает с одним из операндов в структурном представлении выражения. такая подстановка называется “синтаксической подстановкой”.

Для выхода из таких ситуаций рассмотрим несколько способов. Первый заключается в том, что следует явно выразить переменную s из уравнения $s^2 = 1 - c^2$ и снова воспользоваться командой лексической подстановки subs():

```
> subs(s=sqrt(1-c^2),exl);
```

$$(1 - c^2)^{(3/2)}$$

Можно воспользоваться командой simplify(), указав в ней в качестве параметра требуемую замену:

Пример ПII.43. *Уровни вычисления имени*

```
> eval(x); #Полное вычисление
```

$$5$$

```
> eval(x,1); # Вычисление до первого уровня
```

$$y$$

```
> eval(x,2); # Вычисление до второго уровня
```

$$z$$

```
> eval(x,3); # Вычисление до третьего уровня
```

$$5$$

Можно воспользоваться командой algsubs(), осуществляющей не синтаксическую, а алгебраическую подстановку:

```
> algubs(s^2=1-c^2,exl);
```

$$s(1-c^2)$$

В первом варианте в выражении заменены все вхождения переменной s,тогда как в других эта переменная остается в результирующем выражении.

Если известно, какой операнд выражения необходимо заменить, то следует использовать команду subsop() со следующим синтаксисом:
subsop(*уравнение*1, *уравнение*2, ... *уравнениеn*, *выражение*);
Первые параметры представляют уравнения, в правой части которых стоят порядковые номера операндов выражения, заданного последним параметром *выражение*, а правые части представляют выражения, на которые заменяются соответствующие операнды:

```
> ex:=cos(x)+cos(x)^(1/3);
```

$$ex := \cos(x) + \cos(x)^{(1/3)}$$

```
> subsop(1=x^2,ex);
```

$$x^2 + \cos(x)^{(1/3)}$$

```
> subsop([2,1,0]=sin,ex);
```

$$\cos(x) + \sin(x)^{(1/3)}$$

Обратите внимание на последний операнд подстановки. Здесь в правой части уравнения, задающей номер операнда, стоит список, в котором целые числа представляют порядковые номера операндов последующих уровней в структуре выражения. В нашем примере (ПII.42) соответствует второму операнду исходного выражения $\left(\cos(x)^{1/3}\right)$, 1 - первому операнду этого второго операнда ($cos(x)$), а 0 используется для имени функции в первом операнде второго операнда исходного выражения, который имеет тип функция. Таким способом можно в выражении заменять имена функций.

Иногда необходимо выполнить преобразование выражения одного типа в другой тип. Такое преобразование типов может потребоваться для выполнения некоторых действий над выражением с помощью команды, не работающей с исходным типом выражения. Например, нельзя строить график ряда Тейлора какой-либо функции, но всегда можно построить график полинома. Следовательно, следует выражение, имеющее тип series(ряд), преобразовать в выражение, имеющее тип polynom (полином), а потом воспользоваться командой plot() для построения графика.

Пример ПII.44. *Преобразование выражений*

```
> restart:
> f:=eval(exp(x));
> t:=taylor(f,x=0);
```

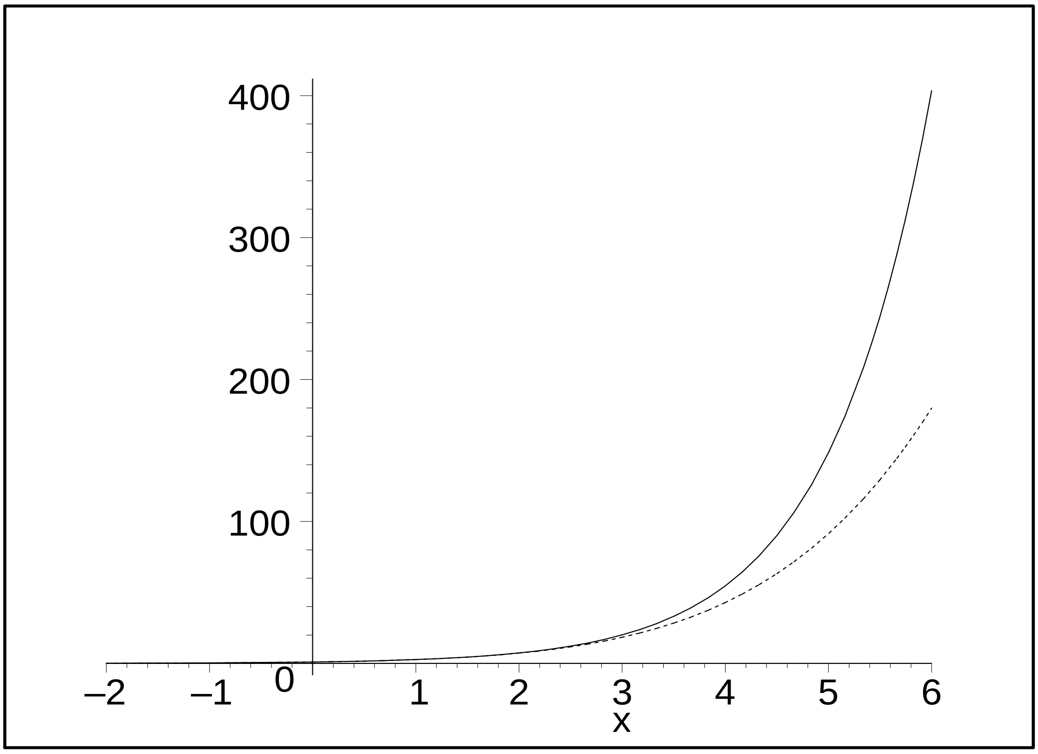
$$f := e^x$$

$$t := 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{120}\,x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

```
> p:=convert(t,polynom);
```

$$p := 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{120}\,x^5$$

```
> plot([f,p],x=-2..6,color=black,linestyle=[1,4]);
```



Преобразование типов в Maple имеет некоторые ограничения, т.е. нельзя преобразовать выражение произвольного типа в выражение другого типа, который поддерживается системой аналитических вычислений. Например, мы видели, что ряд можно преобразовывать в полином, однако, обратное неверно.

II.5.12 Вычисление выражений

В программах символьных вычислений пользователь сталкивается с понятием *вычисление* символьных имен, которое отсутствует в системах численных расчетов. Действительно, так как можно использовать неопределенные переменные, или неизвестные, то какому значению должна равняться переменная x, если сначала ей присвоили неизвестную величину y, затем неизвестной y присвоили неизвестную величину z, и, наконец, переменной z присвоили число 5. Ответ на этот вопрос дают правила вычислений, включающие в себя понятие уровней вычислений.

Уровни вычислений

В большинстве случаев Maple использует алгоритм *полного вычисления* имен. Это означает, что когда необходимо вычислить значение символьной переменной, проверяется, присваивалось ли ей какое-либо значение. Если да, то оно подставляется вместо имени переменной и проверяется, содержит ли подставленное значение неизвестные переменные. Если содержит, то проверяется, было ли присваивание для этих имен и процесс продолжается дальше рекурсивно, пока вместо имен всех переменных не будут подставлены присвоенные им значения, или если им ничего не присваивалось, то такие имена останутся в окончательном результате вычисления имени переменной как неизвестные величины. Теперь понятно, как Maple решит поставленную в начале раздела задачу - значение переменной x будет равно 5.

Пример ПII.45. *Полное вычисление имени*

```
> x:=y;
```

$$x := y$$

```
> y:=z;
```

$$y := z$$

```
> z:=5;
```

$$z := 5$$

```
> x;
```

$$5$$

При вычислении значения имени или символа может оказаться, что необходимо осуществить несколько подстановок. Каждая подстановка при вычислении имени называется *уровнем вычисления* имени, и все они последовательно нумеруются, начиная с самого первого присваивания значении имени.
Команда eval() служит для явного полного вычисления имени, заданного в качестве значения ее первого параметра. Вторым параметром, принимающим целые значения, можно задать глубину вычисления имени, определив уровень, до которого имя следует вычислить. Пример (ПII.46) иллюстрирует использование этой команды для вычисления имени x, определенного в предыдущем примере (ПII.45).

Пример ПII.46. *Уровни вычисления имени*

```
> eval(x); #Полное вычисление
```

$$5$$

```
> eval(x,1); # Вычисление до первого уровня
```

$$y$$

```
> eval(x,2); # Вычисление до второго уровня
```

$$z$$

```
> eval(x,3); # Вычисление до третьего уровня
```

$$5$$

Правилу полного вычисления подчиняются переменные всех типов за исключением переменных, содержащих массивы, таблицы, матрицы и процедуры.Для них действует правило, в соответствии с которым они вычисляются до значения последнего присвоенного имени, содержащего указанные выше объекты. Такое правило для массивов, таблиц, матриц и процедур введено для того, чтобы сохранять компактное представление элементов массивов с не присвоенными значениями и не вычисленными командами, например sin(x). Для полного вычисления имен, хранящих массивы, таблицы и процедуры, следует явно инициировать полное вычисление командой eval().

Пример ПII.47. *Уровни вычисления имени*

```
> x:=y;
```

$$x := y$$

```
> y:=array([[1,2],[2,1]]);
```

$$y := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> x;
```

$$y$$

```
> eval(x);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> eval(x,1);
```

$$y$$

```
> eval(x,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

По умолчанию Maple не отображает код библиотечных процедур при их полном вычислении функцией eval(). Такой режим отображения можно изменить установив опцию verboserpoc, равной 2, в команде interface();

В следующем примере текст процедуры вычисления синуса приведен не полностью в связи с его большими размерами

```
> eval(sin);
> proc (x::algebraic) local n, t, pull_out,%2d
> keep_in; option ‘Copyright
> (c) 1992 by the University of Waterloo. All rights reserved.‘; if
> nargs <> 1 then error "expecting 1 argument, got %1", nargs elif
> type(x,'complex(float)') then evalf(('sin')(x)) elif
> type(x,'infinity') then if type(Re(x),'infinity') then
> ‘if‘(type(Im(x),'undefined'),NumericTools:-ThrowUndefined(x),x*undefin
> ed) elif type(x,'imaginary') then x else infinity+infinity*I end if
> elif type(x,'undefined') then
> NumericTools:-ThrowUndefined(x,('preserve') = ('axes')) elif
> type(x,'SymbolicInfinity') and traperror(is(x,real)) = true then
> undefined elif type(x,'imaginary') or type(x,‘*‘) and
> member(true,map(type,{op(x)},'imaginary')) then I*sinh(-I*x) elif
> type(x,'complex(numeric)') then if csgn(x) < 0 then -sin(-x) else
> ('sin')(x) end if elif type(x,‘*‘) and
> type(op(1,x),'complex(numeric)') and csgn(op(1,x)) < 0 then -sin(-x)
> elif type(x,‘*‘) and type(x,'‘&*‘(rational,identical(Pi))') then t :=
> op(1,x); if t < 1/2 then ('sin')(x) elif t < 1 then sin((1-t)*Pi) elif
> t < 2 then -sin((2-t)*Pi) else sin((t-2*iquo(trunc(t),2))*Pi) end if
> elif type(x,‘*‘) and
> select(type,[op(x)],('specfunc')('anything','csgn')) <> [] then
> pull_out, keep_in :=
> selectremove(type,x,('specfunc')('anything','csgn'));
> pull_out*sin(keep_in) elif type(x,('specfunc')('anything','csgn'))
> then x*sin(1) elif type(x,‘+‘) and traperror(sign(x)) = -1 then
> -sin(-x) elif type(x,‘+‘) and has(x,Pi) then t := map(proc (x) if
> type(x/Pi,'rational') then x/Pi end if end proc,{op(x)}); if nops(t)
> = 1 then t := op(t); if t < 0 then sin(x-2*Pi*trunc(1/2*t)+2*Pi) elif
> t < 1/2 then sin(x) := ('sin')(x) elif t < 1 then cos(x-1/2*Pi) elif t
> < 2 then -sin(x-Pi) else sin(x-2*Pi*trunc(1/2*t)) end if else
> ‘sin/normal‘(x) end if elif type(x,‘*‘) and member(Pi,[op(x)],'n') and
> Im(x) = 0 then t := subsop(n = 1,x); n := frac(t); if n = 0 then 0
> elif frac(1/2*t-1/4) = 0 then 1 elif frac(1/2*t+1/4) = 0 then -1 elif
> frac(t-1/2) = 0 then (-1)^(t-1/2) else ‘sin/normal‘(x) end if elif
> type(x,'function') and nops(x) = 1 then n := op(0,x); t := op(1,x); if
> n = ('arcsin') then t elif n = ('arccos') then sqrt(1-t^2) elif n =
> ('arctan') then t/sqrt(1+t^2) elif n = ('arccsc') then 1/t elif n =
> ('arcsec') then sqrt(1-1/(t^2)) elif n = ('arccot') then 1/sqrt(1+t^2)
> else ‘sin/normal‘(x) end if elif
> type(x,('specfunc')('anything','JacobiAM')) then JacobiSN(op(x)) elif
> type(x,'arctan(algebraic,algebraic)') then
> op(1,x)/sqrt(op(1,x)^2+op(2,x)^2) else ‘sin/normal‘(x) end if end
> proc;
> interface(verboseproc=2);
> eval(exp);
```

```
> proc (x::algebraic) local i, t, q, n, f,
> r; option ‘Copyright (c) 1992 by the University of Waterloo. All
> rights reserved.‘; if nargs <> 1 then error "expecting 1 argument,
> got %1", nargs elif type(x,’complex(float)’) then
> evalf((’exp’)(x)) elif type(x,’rational’) then exp(x) :=
> (’exp’)(x) elif type(x,’function’) and op(0,x) = (’ln’) then
> exp(x) := op(1,x) elif type(x,’function’) and
> type(op(0,x),’function’) and op([0, 0],x) = (’‘@‘’) and op([0,
> 1],x) = (’ln’) then exp(x) := op([0, 2],x)(op(x)) elif
> type(x,’function’) and type(op(0,x),’function’) and op([0, 0],x) =
> (’‘@@‘’) and op([0, 1],x) = (’ln’) then exp(x) := ‘@@‘(ln,op([0,
> 2],x)-1)(op(x)) elif type(x,’‘*‘’) and type(-I*x/Pi,’rational’)
> then i := -I*x/Pi; if 1 < i or i <= -1 then t := trunc(i); t :=
> t+irem(t,2); exp(x) := exp((i-t)*Pi*I) elif type(6*i,’integer’) or
> type(4*i,’integer’) then exp(x) := cos(-I*x)+sin(-I*x)*I else
> exp(x) := (’exp’)(x) end if elif type(x,’‘*‘’) and
> member(Pi,[op(x)]) and Im(-I*x/Pi) = 0 and
> type(frac(-I*x/Pi),NumericClass(0)) then i := -I*x/Pi; if
> frac(1/2*i) = 0 then exp(x) := 1 elif frac(1/2*i+1/2) = 0 then
> exp(x) := -1 else exp(x) := (-1)^i end if elif type(x,’infinity’)
> then if type(Im(x),’infinity’) then if type(Re(x),’undefined’)
> then NumericTools:-ThrowUndefined(x) else undefined+undefined*I
> end if elif type(Re(x),’neg_infinity’) then 0 elif
> type(x,’pos_infinity’) then x else infinity+infinity*I end if elif
> type(x,’SymbolicInfinity’) and
> type(signum(0,x,undefined),’numeric’) then
> ‘if‘(signum(0,x,undefined) = 1,infinity,0) elif
> type(x,’SymbolicInfinity’) and member(signum(x),{-I, I}) then
> undefined+undefined*I elif type(x,’undefined’) then
> NumericTools:-ThrowUndefined(x,(’preserve’) = (’real’)) elif
> typematch(x,’‘&*‘(r::rational,f::specfunc(anything,ln))’) then if
> type(r,’fraction’) and irem(denom(r),2,’q’) = 0 then exp(x) :=
> sqrt(op(1,f))^(numer(r)/q) else exp(x) := op(1,f)^r end if elif
> type(x,’function’) and nops(x) = 1 then n := op(0,x); t :=
> op(1,x); if n = (’arcsinh’) then exp(x) := t+sqrt(1+t^2) elif n =
> (’arccosh’) then exp(x) := t+sqrt(t+1)*sqrt(t-1) elif n =
> (’arctanh’) then exp(x) := (t+1)/sqrt(1-t^2) elif n = (’arccsch’)
> then exp(x) := 1/t+sqrt(1+1/(t^2)) elif n = (’arcsech’) then
> exp(x) := 1/t+sqrt(1/t-1)*sqrt(1/t+1) elif n = (’arccoth’) then
> exp(x) := 1/sqrt((t-1)/(t+1)) else exp(x) := (’exp’)(x) end if
> elif typematch(x,’‘&*‘(r::rational,f::arctrigh)’) then exp(x) :=
> exp(f)^r elif typematch(-I*x,f::(’arctrig’)) then n := op(0,f); t
> := op(1,f); if n = (’arcsin’) then exp(x) := t*I+sqrt(1-t^2) elif
> n = (’arccos’) then exp(x) := t+sqrt(1-t^2)*I elif n = (’arctan’)
> then if nops(f) = 1 then exp(x) := (1+t*I)/sqrt(1+t^2) else exp(x)
> := exp(convert(x,’ln’,"old mode")) end if elif n = (’arccsc’) then
> exp(x) := 1/t*I+sqrt(1-1/(t^2)) elif n = (’arcsec’) then exp(x) :=
> 1/t+sqrt(1-1/(t^2))*I elif n = (’arccot’) then exp(x) :=
> (t+I)/sqrt(1+t^2) else exp(x) := (’exp’)(x) end if elif
> typematch(-I*x,’‘&*‘(r::rational,f::arctrig)’) then exp(x) :=
> exp(f*I)^r else exp(x) := (’exp’)(x) end if end proc;
```

Иногда необходимо просто вычислить имя переменной, не инициируя алгоритм полного или частичного вычисления. Для подобных целей в Maple присутствует команда evaln(), которая "вычисляет имя" символьной переменной, переданной ей в качестве параметра, даже если этой переменной были присвоены значения:
> x:=u;

$$x := u$$

> x;

$$u$$

> evaln(x);

$$x$$

Если заключить имя переменной в одинарные кавычки, то их действие будет аналогично действию команды evaln(). Подобное обстоятельство часто используется для передачи в некоторые команды, которые в качестве параметра требуют имя переменной,"закавыченное"имя переменной, чтобы избежать появления ошибок:

```
>  i:=5;
```

$$i := 5$$

```
>  sum(i^2,i=1..3);

Error, (in sum) summation variable previously assigned, second
argument evaluates to 5 = 1 .. 3

>  sum('i'^2,'i'=1..3);
```

$$14$$

Если переменной присвоить ее же имя, заключенное в кавычки, то эта операция приведет к тому, что переменная снова станет "чистой", т.е. будут аннулированы все предыдущие присваивания, и ее снова можно использовать в качестве неизвестной величины:
> x:=1;

$$x := 1$$

> x;

$$1$$

> x:='x';

$$x := x$$

> x;

$$x$$

Действия операции заключения в одинарные кавычки распространяется на целые выражения, откладывая их полное вычисление:
> y:=1;

$$y := 1$$

> x:=y+1;

$$x := 2$$

> x:='y+1';

$$x := y + 1$$

Команда assigned() проверяет, было ли переменной, определенной ее параметром, присвоено какое-либо значение:
> assigned(i);

$$true$$

Задача вычисления имен - эта специфическая задача систем аналитических вычислений, а в практике математических вычислений часто встречается задача вычисления значения некоторого выражения или функции в определенной точке. В Maple ее можно решить несколькими способами.
Например, присвоить некоторой величине необходимое значение, и при очередном вычислении вместо этой величины будет подставлено значение выражения в заданной точке:
> `g:=x^2+x+1;`

$$g := x^2 + x + 1$$

> x:=1;

$$x := 1$$

> g;

$$3$$

При таком подходе, мы "теряем" выражение как выражение с неизвестной переменной. Поэтому в подобных случаях лучше воспользоваться функцией eval(), задав ее вторым параметром уравнение, в левой части которого стоит неизвестная величина, а в правой ее значение:
> `g:=x^2+x+1;`

$$g := x^2 + x + 1$$

> eval(g,x=1);

$$3$$

> g;

$$x^2 + x + 1$$

Переменная, хранящая выражение с неизвестной, продолжает его хранить и после вычисления командой eval(). Этого же можно достигнуть и с помощью функции subs(), но использование функции eval() приводит к корректным математическим вычислениям. Эта функция умеет вычислять интегралы и производные, а также работать с кусочно-непрерывными функциями, тогда как использование для целей вычисления выражения в точке функции susbs() может приводить к неправильным математическим результатом:

```
> der :=diff(f(x),x)+f(x);
```

$$der := (\frac{d}{dx}\,\mathrm{f}(x)) + \mathrm{f}(x)$$

```
> eval(der,x=0);
```

$$(\frac{d}{dx}\,\mathrm{f}(x))\Big|_{x\,=\,0} + \mathrm{f}(0)$$

```
> subs(x=0,der);
```

$$\mathrm{diff}(\mathrm{f}(0),\,0) + \mathrm{f}(0)$$

Maple по умолчанию стремится производить все преобразования и вычисления с максимальной точностью, т.е. там, где это возможно, использовать арифметику с дробными

числами и радикалами. Иногда, это не совсем удобно и необходимо получить результат в форме привычных десятичных чисел. Для вычисления и преобразования коэффициентов выражений, представленных обыкновенными дробями, существует команда evalf(), аппроксимирующая дробные числа десятичными числами, а также вычисляющая выражения и константы Maple в форме числа с плавающей точкой.
По умолчанию используется арифметика чисел с плавающей точкой с 10 значащами цифрами. Это значение можно изменить, переустановив системную константу Digits в другое значение, например:
> Digits:=15;
После выполнения этого оператора все последующие в сеансе Maple вычисления с плавающей точкой будут производиться с 15 значащими цифрами. Обратим внимание, что имя этой системной переменной начинается с прописной буквы. Синтаксис команды evalf() следующий:
evalf(f);
evalf(f,n);
где f - вычисляемое выражение, а n - число значащих цифр, используемых при вычислении.

Пример ПII.48. *Вычисление выражений в десятичной форме*

```
> evalf(Pi,20);
```

$$3.1415926535897932385$$

```
> Digits:=30;
```

$$Digits := 30$$

```
> evalf(5/3*exp(-2)*sin(Pi/4));
```

$$0.159494160850684873267979942007$$

```
> evalf(cos(1));
```

$$0.540302305868139717400936607443$$

```
> evalf(3/4*x^2+1/3*x-sqrt(2),10);
```

$$0.7500000000\,x^2 + 0.3333333333\,x - 1.414213562$$

Для ускорения вычисления больших и сложных числовых выражений можно воспользоваться командой evalhf(), единственным параметром которой является вычисляемое выражение. Эта команда, в отличие от evalf(), использует вещественную арифметику процессора компьютера, а не программную эмуляцию. Правда, точность вычисления в этом случае зависит от разрядности компьютера и на машинах с 32-разрядным процессором не превышает 15 значащих цифр в мантиссе представления числа.

II.5.13 Решение уравнений, неравенств и их систем

Практически ни одна задача не обходится без решения какого-нибудь уравнения или системы уравнений, неравенства или системы неравенств. Команда solve() системы Maple является универсальным средством, позволяющим решать алгебраические уравнения, неравенства и их системы. Но прежде чем перейти к синтаксису этой команды, следует еще немного остановиться на тех объектах, с которыми эта команда работает,- на уравнениях и неравенствах.

Как мы уже определили ранее, два выражения, соединенные знаком равенства (=), представляют самостоятельный тип данных Maple - *уравнение* (equation). Уравнения можно присваивать обычным переменным Maple, с ними можно осуществлять преобразования, используя обычные арифметические действия, которые выполняются отдельно для левой и правой частей уравнений. Эти действия позволяют преобразовать уравнения к виду, удобному для использования, а иногда и облегчающему Maple поиск решения. В следующем примере приведены некоторые преобразования, которые можно осуществлять с уравнениями в Maple.

Пример ПI.49. *Допустимые операции с уравнениями*

```
> 2*x^2+5=x+x^4;
```

$$2\,x^2+5=x+x^4$$

```
> whattype(%);
```

$$=$$

```
> f:=2*x^2+5=x+x^4;
```

$$f := 2\,x^2+5=x+x^4$$

```
> whattype(f);
```

$$=$$

```
> eq1:=sin(x)+cos(x)=cos(x)^2;
```

$$eq1 := \sin(x)+\cos(x)=\cos(x)^2$$

```
> eq1-(cos(x)=cos(x));
```

$$\sin(x)=\cos(x)^2-\cos(x)$$

```
> eq1+(cos(x)=cos(x));
```

$$\sin(x)+2\cos(x)=\cos(x)^2+\cos(x)$$

При проверке типа переменной, значением которой является уравнение, с помощью команды whattype() результатом является равенство =, означающее, что тип проверяемой переменной является уравнением.

Точно так же, как и при задании уравнений,два выражения, соединенные знаками $>=$ (больше или равно), $<=$ (меньше или равно), $>$ (больше) или $<$ (меньше), представляют новый тип - *неравенство* (inequation).

Пример ПI.50. *Неравенства*

```
> x<y;
```

$$x<y$$

```
> whattype(%);
```

$$<$$

```
> f:=x>y;
```

$$f := y < x$$

```
> whattype(f);
```

$$<$$

```
> f-(z>4);
```

$$y - z < x - 4$$

```
> f-(z<4);
```

$$y - 4 < x - z$$

При проверке типа объекта, представляющего неравенство, в области вывода отображается либо $<>$, Либо $<$, либо $<=$. Дело в том, что Maple «понимает» только эти три типа. Неравенства противоположного знака приводятся к ним перестановкой левой и правой частей с заменой знаков на противоположные.

Команда solve()

Команда solve() одна из самых полезных команд системы аналитических вычислений Maple, позволяющая решать уравнения и системы уравнений, неравенства и системы неравенств. Она всегда пытается найти замкнутое решение в аналитической форме. Ее синтаксис как и синтаксис всех команд Maple, достаточно прост и легко запоминается:

```
solve(уравнение, переменная);
solve({уравнение1,уравнение2,...},{переменная1,переменная2 ...});
```

Первая форма команды предназначена для решения одного уравнения относительно заданной переменной, тогда как вторая форма позволяет решать системы уравнений относительно переменных, заданных вторым параметром. Обратим внимание на то, что система уравнений и ее неизвестные переменные задаются в виде множеств. Результатом в этом случае является также множество значений неизвестных в виде уравнений, тогда как в случае задания одного уравнения результатом будет выражение (в случае одного корня уравнения) или последовательность выражений (в случае нескольких корней). Если не задана переменная/переменные, относительно которых следует решать уравнение/систему уравнений, то Maple выдаст все решения относительно всех неопределенных переменных в исходных уравнениях. Если вместо уравнения задано выражение с неизвестными, то оно рассматривается как левая часть уравнения, тогда как правая часть предполагается равной 0. Следующий пример иллюстрирует некоторые из перечисленных ситуаций.

Пример III.51. *Решение уравнений и систем уравнений*

```
> eq:=x^2-2*x+y^2=0;
```

$$eq := x^2 - 2\,x + y^2 = 0$$

```
> solve(eq,x);
```

$$1 + \sqrt{1 - y^2},\ 1 - \sqrt{1 - y^2}$$

```
> solve({eq},x);
```

$$\{x = 1 + \sqrt{1 - y^2}\}, \{x = 1 - \sqrt{1 - y^2}\}$$

```
> eq1:=x+y=0;
```

$$eq1 := x + y = 0$$

```
> solve({eq,eq1},{x,y});
```

$$\{y = 0, x = 0\}, \{x = 1, y = -1\}$$

```
> solve(eq);
```

$$\{y = \sqrt{-x^2 + 2\,x}, x = x\}, \{y = -\sqrt{-x^2 + 2\,x}, x = x\}$$

Когда Maple не может найти ни одного решения, то команда solve() возвращает пустую последовательность NULL. Это означает, что либо решения не существует, либо Maple не удалось его найти. Если не удалось найти все решения, то глобальная переменная `_SolutionsNayBelost` устанавливается равной true. Решение последнего примера осуществлялось без указания переменной, относительно которой следовало решать уравнение. Maple решил их относительно всех неизвестных величин, входящих в уравнение. Причем он выбрал неизвестную x в качестве параметра ($x = x$), а неизвестную переменную y выразил через введенный параметр x. Чтобы получить решение, следует параметру x присвоить произвольное значение, тогда значение неизвестной y будет определенно однозначно.

В общем случае полиномиальное уравнение степени выше 4 может не иметь решения, выраженного с помощью радикалов. В этом случае для представления результатов Maple использует специальную функцию RootOf(), которая применяется для обозначения любого корня выражения, заданного в качестве ее параметра:

```
> eq:=x^5+x^3+1=0;
```

$$eq := x^5 + x^3 + 1 = 0$$

```
> s:=solve(eq,x);
```

$s := \mathrm{RootOf}(\%1, \mathit{index} = 1), \mathrm{RootOf}(\%1, \mathit{index} = 2), \mathrm{RootOf}(\%1, \mathit{index} = 3),$
$\mathrm{RootOf}(\%1, \mathit{index} = 4), \mathrm{RootOf}(\%1, \mathit{index} = 5)$
$\%1 := \_Z^5 + \_Z^3 + 1$

```
> evalf(s[1]);
```

$$0.6366631068 + 0.6647015651\,I$$

```
> solve(x=cos(x));
```

$$\mathrm{RootOf}(\_Z - \cos(\_Z))$$

В этом примере функция `RootOf(_Z-cos(_Z))` представляет любое решение уравнения `_Z-cos(_Z)=0`. Обратим внимание на переменную `_Z`. Эта системная переменная сгенерированная Maple, которая всего лишь заменяет переменную x нашего уравнения. Опция index со значением равным целому числу, служит для нумерации и упорядочивания корней уравнения. Обратим внимание, что с помощью функции evalf() можно получить приближенные числовые значения функции RootOf.

Особо отметим решение с помощью команды solve() тригонометрических уравнений. По умолчанию Maple решает их на промежутке $[-\pi, \pi]$. Для получения всех решений тригонометрических уравнений следует задать значение глобальной переменной

`_EnvAllSolutions` равным true. Следующий пример иллюстрирует использование глобальной переменной
`_EnvAllSolutions`:

```
> eq:=sin(x)^2+2*sin(x)+1=0;
```

$$eq := \sin(x)^2 + 2\sin(x) + 1 = 0$$

```
> s:=solve(eq,x);
```

$$s := -\frac{\pi}{2},\, -\frac{\pi}{2}$$

```
> _EnvAllSolutions:=true;
```

$$\_EnvAllSolutions := true$$

```
> s:=solve(eq,x);
```

$$s := -\frac{1}{2}\pi + 2\pi\,\_Z1\tilde{},\, -\frac{1}{2}\pi + 2\pi\,\_Z2\tilde{}$$

Как видно, в случае `_EnvAllSolutions:=true` Maple действительно строит все решения тригонометрического уравнения с использованием целочисленной системной переменной `_Z1~`, в которой знак тильда `(~)` означает, что на значения переменной наложены некоторые ограничения. В данном случае эта переменная может принимать только целочисленные значения. (В этом можно убедиться, выполнив команду `about(_Z1)`.) Подобные переменные используются Maple для представления всех решений тригонометрических уравнений. Префикс `_Z` в имени переменной, сгенерированной Maple, служит указанием того, что эта переменная может принимать только целые значения. Кроме указанных переменных также используются переменные с префиксом `_NN`, принимающие неотрицательные целые значения, и префиксом `_B`, для представления переменных с двоичной областью значения (0 или 1).

Когда мы вручную решаем уравнение или системы уравнений, то после получения ответа мы всегда осуществляем проверку полученного решения, подставляя его в исходное уравнение или систему. Точно также следует поступать и при работе в Maple. И решения, получаемые в виде последовательностей множеств, когда уравнение или система уравнений заданы в виде множеств, оказываются самыми подходящими для этих целей.

Наиболее удобным и подходящим методом проверки решений является использование функции eval(). Пусть мы решили, например, систему уравнений:

```
> eqns:={x+2*y=3,y+1/x=1};
```

$$eqns := \{x + 2\,y = 3,\, y + \frac{1}{x} = 1\}$$

```
> sols:=solve(eqns,{x,y});
```

$$sols := \{x = -1,\, y = 2\},\, \{x = 2,\, y = \frac{1}{2}\}$$

Последовательность множеств, представляющих два полученных решения, сохранена в переменной sols. Теперь, чтобы проверить правильность полученных решений, следует подставить их в исходную систему и вычислить полученные выражения с помощью команды eval().

```
> eval(eqns,sols[1]);
```

```
{1=1,3=3}
> eval(eqns,sols[2]);

{1=1,3=3}
```

Как видим, в результате вычисления системы уравнений на двух полученных решениях мы получили тождества, что говорит о правильности наших решений. Если нам для дальнейших вычислений необходимо иметь значения первого решения в виде отдельных переменных, то той же самой командой eval() можно извлечь их, вычислив, соответственно, неизвестную x и y на первом решении:

```
> x1:=eval(x,sols[1]);
```

$$x1 := -1$$

```
> y1:=eval(y,sols[2]);
```

$$y1 := \frac{1}{2}$$

Для проверки решения можно использовать функцию map() вместе с функцией subs(), которая за одну операцию выполнит проверку всех решений. Эта методика достаточно удобна, особенно тогда, когда решений очень много и для каждого из них пришлось бы выполнять команду eval(), если использовать предыдущий подход. Для решения нашей системы вызов команды map() выглядит так:

```
> map(subs,[sols],eqns);
```

$$[\{1 = 1, 3 = 3\}, \{1 = 1, 3 = 3\}]$$

Команда solve() может решать неопределенные системы уравнений, в которых количество уравнений меньше числа неизвестных. В этом случае система Maple сама решает, какие из неизвестных принять за параметры, а какие за неизвестные, относительно которых следует строить решение:

```
> eqn1:=x+2*y+3*z+4*t=41:
> eqn2:=5*x+5*y+4*z+3*t=20:
> sols:=solve({eqn1,eqn2});
```

$$sols := \{y = 37 - \frac{11\,z}{5} - \frac{17\,t}{5},\ x = -33 + \frac{7\,z}{5} + \frac{14\,t}{5},\ z = z,\ t = t\}$$

Здесь решение получено в параметрической форме относительно неизвестных z и t, которые выбраны системой. Можно явно указать, относительно каких неизвестных следует решать систему уравнений, тогда оставшиеся будут рассматриваться как параметры:

```
> sols1:=solve({eqn1,eqn2},{y,z});
```

$$sols1 := \{z = \frac{5\,x}{7} + \frac{165}{7} - 2\,t,\ y = -\frac{11\,x}{7} - \frac{104}{7} + t\}$$

В этом решении явно указаны неизвестные y и z, и полученное решение зависит от двух параметров x и t.

С помощью функции eval() можно вычислить значения решения при конкретных значениях параметров и даже выделить их в отдельные переменные:

```
> eval(sols1,{x=1,t=1});
```

$$\{z = \frac{156}{7},\ y = \frac{-108}{7}\}$$

```
> x1:=eval(x,sols);
```

$$x1 := -33 + \frac{7\,z}{5} + \frac{14\,t}{5}$$

```
> eval(y(1,1),sols1);
```

$$-\frac{11}{7}\,\mathrm{x}(1,\,1) - \frac{104}{7} + \mathrm{t}(1,\,1)$$

Однако выделенное решение не совсем удобно для дальнейшего применения: оно не является функцией своих параметров и каждый раз, когда необходимо вычислить его при каких-то значениях параметров, необходимо обращаться к функции eval(). Хотелось бы получить его в виде функции от двух переменных. Для этого следует воспользоваться командой unapply(), которая преобразует выражение в функцию. Первым параметром задается само выражение, а последующие определяют, от каких параметров эта функция будет зависеть.

Если при решении систем уравнений ответ получается в виде множества уравнений, в которых левая часть является неизвестной переменной, то для того, чтобы присвоить найденные значения переменным, относительно которых решалась система, следует применять команду assign(). Эта команда присваивает переменным, стоящим в левой части уравнений из множества решений, значения, равные правым частям. Об этой команде можно думать как о команде, которая заменяет знак равенства (=) на знак операции присваивания (:=) во множестве, состоящем из уравнений, в которых левые части представлены неизвестными:

```
> {q=a+b,w=g+p};
```

$$\{q = a + b,\, w = g + p\}$$

```
> assign(%);q;w;
```

$$a + b$$
$$g + p$$

```
> eq:=x*a+y*b=c;
```

$$eq := x\,a + y\,b = c$$

```
> s:=solve({eq,x+y=1},{x,y});
```

$$s := \{y = \frac{a - c}{a - b},\, x = -\frac{b - c}{a - b}\}$$

```
> assign(s);x;y;
```

$$-\frac{b - c}{a - b}$$
$$\frac{a - c}{a - b}$$

Если решение получено в виде последовательности выражений, то получить значение соответствующего решения можно с помощью индекса.

```
> eq:=x^4+2*x^2+1=0;
```

$$eq := x^4 + 2\,x^2 + 1 = 0$$

```
> s:=solve(eq);
```

Таблица.10. Значение параметра *опция* команды fsolve()

Значение	Смысл
complex	Разыскиваются комплексные корни (только для полиномов)
Fulldigits	Используется арифметика с максимальной мантиссой
Maxsols=n	Разыскивается n решений (только для полиномов)
a..b или x=a..b	Задан промежуток [a,b], на котором разыскивается решение (во второй форме задания этой опции x обозначает имя неизвестной в уравнение)

$$s := I,\ -I,\ I,\ -I$$

```
> x1:=s[2];x1;
```

$$x1 := -I$$
$$-I$$

Напомним, что в приведенном примере I означает комплексную мнимую единицу, равную $\sqrt{-1}$.

Команда fsolve()

По умолчанию Maple пытается найти аналитическое выражение для корней уравнения. Если это ему не удается, то, как отмечалось выше, он просто ничего не печатает в области вывода. В подобных случаях (если корни действительно существуют) можно воспользоваться командой fsolve(), которая находит численное решение уравнения или системы уравнений. Формат команды отличается от формата команды solve() наличием третьего параметра *опция*:
fsolve(*уравнения*, *переменные*, *опция*);
Задание первых двух параметров соответствует заданию аналогичных параметров в команде solve(), а параметр *опция* может принимать значения из таблицы Табл.10.

По умолчанию для произвольного уравнения эта функция находит одно решение, но для полиномов определяются все действительные корни. Чтобы найти все корни полинома, включая комплексные, следует задать опцию complex. Использование команды численного решения уравнений показано в примере (ПI.52).

Пример ПI.52. *Численное решение уравнений*

```
> ristart:
> eq:=x^4+2*x^2-1=0;
```

$$eq := x^4 + 2\,x^2 - 1 = 0$$

```
> s:=fsolve(eq,x);
```

$$s := -0.6435942529,\ 0.6435942529$$

```
> s:=fsolve(eq,x,complex);
```

$$s := -0.6435942529,\ -1.553773974\,I,\ 1.553773974\,I,\ 0.6435942529$$

```
> fsolve(ln(sin(x))=0,x);
```

$$1.570796327$$

```
> fsolve(ln(sin(x))=0,x,x=2..infinity);
```

$$14.13716694$$

```
> fsolve(ln(sin(x))=0,x,x=15..infinity);
```

$$26.70353756$$

В этом примере также показано, каким образом можно последовательно находить корни произвольного уравнения, задавая интервал изменения неизвестной величины с учетом полученного решения на предыдущем шаге нахождения корня (последние три команды).

Другие команды решения уравнений

Кроме универсальных команд solve() и fsolve() решения уравнений и систем уравнений, Maple содержит специализированные команды, предназначенные для решения либо определенного класса уравнений, либо нахождение решений в заданном числовом поле. В данном разделе эти команды описаны очень кратко.
Команда isolve() ищет все целые решения уравнений. Если в уравнении задано несколько неизвестных, то строится решение относительно всех заданных неизвестных.

Пример ПII.53. *Целочисленное решение уравнений*

```
> isolve({(x-1)*(x-1/2)=0});
```

$$\{x = 1\}$$

```
> isolve({3*x+4*y=1});
```

$$\{x = -1 - 4\,\_Z1,\ y = 1 + 3\,\_Z1\}$$

В решении уравнения (ПII.53) использована целочисленная переменная `_Z`I, сгенерированная Maple.
Команда msolve() также ищет целочисленные решения уравнения, но только по модулю, заданному вторым параметром.

Пример ПII.54. *Целочисленное решение уравнений по заданному целому модулю*

```
> solve({3*x-4*y=1,7*x+y=2});
```

$$\{x = \frac{9}{31},\ y = \frac{-1}{31}\}$$

```
> msolve({3*x-4*y=1,7*x+y=2},11);
```

$$\{x = 1,\ y = 6\}$$

```
> msolve({3^n=4},11);
```

$$\{n = 4 + 5\ \_Z1\tilde{}\}$$

Для решения рекуррентных уравнений в Maple включена специальная команда rsolve(), которая строит общее решение рекуррентного уравнения, используя начальные значения, если они заданы, или через их символьные обозначения, если они не заданы.

Пример III.55. *Решение рекуррентных уравнений*

```
> rsolve({F(n+2)=F(n+1)+F(n)},F(n)); # без начальных условий
```

$$\left(\frac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{F}(0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{F}(0) - \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\mathrm{F}(1)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
$$+\left(-\frac{1}{10}\sqrt{5}\,\mathrm{F}(0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{F}(0) + \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\mathrm{F}(1)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

```
> rsolve({F(n+2)=F(n+1)+F(n), F(0)=1,F(1)=1},{F(n)}); # используя
> заданные начальные условия
```

$$\{\mathrm{F}(n) = \left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\}$$

Решение неравенств

Для решения неравенств и систем неравенств в области вещественных чисел следует использовать команду solve() точно так же, как и для решения уравнений и систем уравнений. Ответ выражается либо в виде множества неравенств, либо через функции RealRange() и Open(). Первая определяет замкнутый отрезок действительных чисел, а вторая используется для указания того, что граничная точка не входит в построенное решение. Для того чтобы задать решение в виде множества, следует задать в виде множества либо само неравенство, либо неизвестную, относительно которой ищется решение. Если этого не сделать, то ответ будет получен с использованием указанных функций определения действительных отрезков.

Пример III.56. *Решение неравенств*

```
> solve((x+2)/(3-x)>2,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(\frac{4}{3}),\ \mathrm{Open}(3))$$

```
> solve((x+2)/(3-x)>2,{x});
```

$$\{x < 3,\ \frac{4}{3} < x\}$$

```
> solve(log[1/3](log[2](x^2-8))>=-1);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-4),\ \mathrm{Open}(-3)),\ \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(3),\ \mathrm{Open}(4))$$

```
> solve({log[1/3](log[2](x^2-8))>=-1});
```

$$\{-4 < x,\ x < -3\},\ \{3 < x,\ x < 4\}$$

В примере (ПІ.56) решены два неравенства, для каждого из которых построено решение в виде множества и в форме действительных интервалов. Пользователь сам решает, какая форма ответа ему более подходит.

II.6 Дифференцирование и интегрирование

Maple позволяет вычислять обыкновенные и частные производные аналитического выражения по одной или нескольким переменным. Для этой процедуры предназначены команды diff() и Diff(). Вторая команда является так называемой *отложенной* командой (inert command), которая не вычисляет производную от выражения, а просто отображает математическую запись взятия производной. Результат действия отложенной команды можно присвоить переменной Maple, а в дальнейшем при помощи команды value()вычислить результат этой отложенной команды. Отложенная форма команды дифференцирования удобна, когда необходимо видеть, какие операции были сделаны для получения нужного выражения. Синтаксис команды дифференцирования следующий:

```
diff(выражение, переменная_1, переменная_2,..., переменная_n);
diff(выражение,[переменная_1, переменная_2,...,переменная_n]);
```

В результате выполнения любой из приведенных команд будет вычислена частная производная n-го порядка от заданного первым параметром выражения по заданным n переменным.
При формировании производных высокого порядка полезен оператор последовательности `$`, который позволяет проще и нагляднее задать производную. Например, для вычисления третьей производной функции f(x) по переменной x можно использовать команду diff(f(x),x,x,x), в которой три раза указано дифференцирование по переменной x, или применить в команде дифференцирования оператор последовательности `x$3`, что упрощает и делает более наглядным задание третьей производной: `diff(f(x),x$3)`.

Пример ПІ.57. *Вычисление производных*

```
> f:=x^2*sin(x)+sqrt(y)*ln(cos(x));
```

$$f := x^2 \sin(x) + \sqrt{y}\ln(\cos(x))$$

```
> diff(f,x);
```

$$2\,x\sin(x) + x^2\cos(x) - \frac{\sqrt{y}\sin(x)}{\cos(x)}$$

```
> diff(f,x$2);
```

$$2\sin(x) + 4\,x\cos(x) - x^2\sin(x) - \sqrt{y} - \frac{\sqrt{y}\sin(x)^2}{\cos(x)^2}$$

```
> diff(f,x,y);
```

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sin(x)}{\sqrt{y}\cos(x)}$$

```
> fDerive:=Diff(f,x);
```

$$fDerive := \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \sin(x) + \sqrt{y}\ln(\cos(x))\right)$$

```
> g:=sqrt(fDerive);
```

$$g := \sqrt{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \sin(x) + \sqrt{y}\ln(\cos(x))\right)}$$

```
> value(%);
```

$$\sqrt{2\,x\sin(x) + x^2\cos(x) - \frac{\sqrt{y}\sin(x)}{\cos(x)}}$$

Последние три команды показывают использование отложенной формы команды дифференцирования.
Интегрирование выражений по заданной переменной осуществляется командой int(), которая также имеет отложенную форму Int(). Эта команда позволяет вычислять как неопределенный интеграл от выражения (при этом в ответе не будет никакой постоянной интегрирования) с использованием следующего синтаксиса команды:
int(*выражение*, *переменная*),
так и определенный интеграл с помощью следующего синтаксиса команды
int(*выражение*, *переменная*=a..b);
где a и b являются пределами интегрирования, причем эти пределы могут быть и аналитическими выражениями.

Пример ПII.58. *Интегрирование функций*

```
> f:=a*x^2*sin(b*x);
```

$$f := a\,x^2\sin(b\,x)$$

```
> int(f,x);
```

$$\frac{a\left(-b^2\,x^2\cos(b\,x) + 2\cos(b\,x) + 2\,b\,x\sin(b\,x)\right)}{b^3}$$

```
> int(f,x=0..1);
```

$$-\frac{a\left(b^2\cos(b) - 2\cos(b) - 2\,b\sin(b) + 2\right)}{b^3}$$

```
> int(f,x=0..a);
```

$$-\frac{a\left(b^2\cos(b\,a)\,a^2 - 2\cos(b\,a) - 2\,b\sin(b\,a)\,a + 2\right)}{b^3}$$

```
> Int(f,x=0..Pi);
```

$$\int_0^{\pi} a\,x^2\sin(b\,x)\,dx$$

```
> value(%);
```

$$-\frac{a\left(b^2\,\pi^2\cos(\pi\,b) - 2\cos(\pi\,b) - 2\,\pi\,b\sin(\pi\,b) + 2\right)}{b^3}$$

Для символьного вычисления определенного интеграла существует две опции, управляющие обработкой разрывов подынтегральной функции. Эти опции задаются третьим параметром в командах int() и Int().

Таблица.11. **Значение параметра flag при численном интегрировании**

Значение	**Смысл**
_Coquad	Применяется только квадратура Кленшо - Куртиса без вызова процедуры обработки сингулярности
_Dexp	Применяется адаптивный метод двойных экспоненциальных процедур
_Ncrule	Применяется метод квадратурной формулы Ньютона - Котеса, являющийся методом фиксированного порядка, и не эффективен для высоких точностей (Digits>15)

По умолчанию команда интегрирования проверяет выражение на непрерывность в области интегрирования и вычисляет интеграл как сумму отдельных определенных интегралов на промежутках непрерывности функций. Опция 'continuous' отключает этот режим и вычисляет интеграл как разность значений первообразной подынтегральной функции в точке начала и конца промежутка интегрирования.
Еще одна опция 'CauchyPrincipalValue' вычисляет несобственные интегралы первого и второго рода в смысле главного значения Коши.
Если Maple не может найти замкнутую форму выражения для определенного интеграла, то команда интегрирования возвращает просто вызов самой себя (в области вывода печатается математическая запись вычисления интеграла, как при обращении к отложенной команде интегрирования). В подобных случаях можно вычислить значение определенного интеграла численным способом с помощью команды evalf(). Синтаксис подобной конструкции следующий:
evalf(int(f,x=a..b));
evalf(Int(f,x=a..b));
evalf(Int(f,x=a..b),digits,flag);
Параметр digits позволяет задать число значащих цифр при вычислениях приближенного значения интеграла (по умолчанию это число равно числу значащих цифр, определенных значением системной константы Digits).
При численном интегрировании по умолчанию используется квадратурная формула Кленшо - Куртиса (Clenshaw - Curtis). Если в подынтегральном выражении встречается сингулярность, то применяется специальная методика символьного анализа для ее разрешения. Для задач с неустранимыми сингулярностями используется адаптивный метод двойных экспоненциальных квадратур. Параметр flag позволяет явно задать метод численного интегрирования. Он может принимать значения, представленные в таблице Табл.11.

Несколько примеров численного вычисления интегралов помогут освоиться с использованием выше приведенной методики.

Пример III.59. *Численное интегрирование функций*

```
> int(sin(x)*ln(x),x=0..1);
```

$$\mathrm{Ci}(1) - \gamma$$

```
> evalf(int(sin(x)*ln(x),x=0..1));
```

$$-0.2398117420$$

```
> Int(sin(x)*ln(x),x=0..1)=evalf(Int(sin(x)*ln(x),x=0..1,20,_Dexp));
```

$$\int_0^1 \sin(x)\ln(x)\,dx = -0.23981174200056472594$$

```
> Int(1/(1+x^2),x=0..infinity)=evalf(Int(1/(1+x^2),x=0..infinity,30,_De
> xp));
```

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = 1.57079632679489661923132169164$$

```
> Int(exp(x-x^2/2)/(1+exp(x)/2),x=-infinity..infinity)=evalf(Int(exp(x-
> x^2/2)/(1+exp(x)/2),x=-infinity..infinity));
```

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(x-1/2\,x^2)}}{1+\frac{1}{2}\,e^x}\,dx = 1.805577062$$

Первый интеграл примера (ПII.59) вычисляется в аналитическом виде, но представляется через значение специальной функции интегральный косинус. Для получения ответа в виде десятичного числа применяется алгоритм численного интегрирования. На этом же примере показано использование отложенной формы команды интегрирования для более удобного представления ответа.
В системе Maple имеется набор команд для полного исследования функций:limit() - для отыскания предела функции, sum() - для нахождения всевозможных конечных сумм, series() - для разложения функций в ряды Тейлора, Маклорена и Лорана, extrema() - для исследования экстремумов функций как одной, так многих переменных, minimize() и maximize() - для поиска минимума и максимума функции на заданном промежутке.

II.7 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем можно воспользоваться командой dsolve() или функциями пакета DEtools,которые позволяют строить численное решение дифференциальных уравнений и отображать их в графическом виде, включая построение фазового портрета систем дифференциальных уравнений. В данном разделе мы остановимся только на описании команды dsolve(), с помощью которой можно не только получить аналитическое решение дифференциального уравнения, но и сформировать процедуру построения численного решения задачи Коши, если система Maple не сможет найти общее решение в аналитическом виде.
Наиболее общий синтаксис вызова команды решения дифференциального уравнения следующий:
dsolve(*уравнения*, *неизвестные*, [*опции*]);
Параметром *уравнения* задается одно дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений. В последнем случае все уравнения системы должны быть

представлены в виде множества (их список через запятую следует заключить в фигурные скобки). Параметр *неизвестные* определяет неизвестную функцию дифференциального уравнения или неизвестные функции системы дифференциальных уравнений, которые, как и сами уравнения системы, должны быть представлены в виде множества. Необязательный параметр *опции*, определяемый в виде `ключевое_значение=значение`, позволяет задать методы и форму представления решения.

Для задания производной искомой функции в дифференциальном уравнении можно использовать команду diff() или оператор D, причем саму неизвестную функцию следует определять с явным указанием независимой переменной, например $y(x)$. Оператор D определяет операцию дифференцирования и имеет следующий синтаксис:

(D@@n)(*функция*)(*переменная*);

В этой записи n представляет целое число, определяющее порядок производной, параметр *функция* - используемый идентификатор функции, а параметр *переменная* - независимую переменную функции. Например, производную второго порядка функции $f(x)$ с использованием этого оператора следует задавать следующим образом:

(D@@2)(f)(x);

Несколько примеров задания дифференциальных уравнений представлены ниже:

```
> eqn1:=diff(y(x),x$2)+k^2*y(x)=0;
```

$$eqn1 := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + k^2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> eqn2:=(D@@2)(y)(x)+k^2*y(x)=sin(k1*x);
```

$$eqn2 := (\mathrm{D}^{(2)})(y)(x) + k^2\,\mathrm{y}(x) = \sin(k1\ x)$$

```
> sys1:=
> {D(y1)(x)=a[1,1]*y1(x)+a[1,2]*y2(x),D(y2)(x)=a[2,1]*y1(x)+a[2,2]*y2(x
> )};
```

$$sys1 := \{\mathrm{D}(y1)(x) = a_{1,1}\,\mathrm{y1}(x) + a_{1,2}\,\mathrm{y2}(x),\ \mathrm{D}(y2)(x) = a_{2,1}\,\mathrm{y1}(x) + a_{2,2}\,\mathrm{y2}(x)\}$$

Обратите внимание, что в приведенных примерах и уравнения, и системы уравнений сохраняются в переменных Maple.

Попробуем решить первое из приведенных примеров. Для этого достаточно выполнить следующую команду dsolve():

```
> dsolve(eqn1,y(x));y(x) = _C1*sin(k*x)+_C2*cos(k*x)
```

Найдено общее решение дифференциального уравнения, в котором переменные $\_C1$ и $\_C2$ - это сгенерированные Maple специальные переменные, представляющие произвольные константы общего решения дифференциального уравнения второго порядка. Этот пример показывает, что при отсутствии каких-либо опций Maple пытается найти точное общее решение в явном виде. Если в явном виде решения не существует, то система попытается найти его в неявном виде, как видно из следующего примера.

```
> eq:=diff(y(x),x)=sqrt(x^2-y(x))+2*x;
```

$$eq := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \sqrt{x^2 - \mathrm{y}(x)} + 2\,x$$

```
> dsolve(eq,y(x));
```

$$\frac{8\,\mathrm{y}(x)\,\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}}{\%1}+\frac{4\,\mathrm{y}(x)\,x}{\%1}-\frac{6\,x^2\,\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}}{\%1}-\frac{3\,x^3}{\%1}-\_C1=0$$
$$\%1:=2\,\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}-x$$

```
> isolate(%,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x)=\frac{5\,x^2}{4}+\frac{(-x+\sqrt{-\_C1})\,x}{2}+\frac{\_C1}{4}$$

Команда isolate() в этом примере выражает заданное вторым параметром выражение ($y(x)$) из уравнения, определяемого первым параметром (в нашем случае из неявного вида общего решения дифференциального уравнения).
По умолчанию команда dsolve() сначала пытается найти общее решение в явном виде, и если таковое не удается найти, то решение выдается в неявном виде (конечно, при условии его существования). Можно “озадачить” Maple поиском общего решения в явном виде, используя опцию explicit=true (по умолчанию используется explicit=false):

```
> dsolve(eq,y(x),explicit=true);
```

$$\mathrm{y}(x)=\mathrm{RootOf}(8\,\_Z\,\sqrt{x^2-\_Z}+4\,\_Z\,x-6\,x^2\,\sqrt{x^2-\_Z}-3\,x^3-2\,\_C1\,\sqrt{x^2-\_Z}+x\,\_C1)$$

Как видим, в этом случае мы действительно получили сразу же решение в явном виде, но оно представлено через функцию RootOf(), так что наш первоначальный подход к решению дифференциального уравнения оказался более продуктивным.
Найти общее решение в явном или в неявном виде удается не для любого дифференциального уравнения. В этом случае можно построить приближенное решение в форме ряда Тейлора. Для этого следует задать опцию type=series в команде dsolve() (по умолчанию используется type=exact), а также установкой значения системной переменной Order определить, до какого порядка малости относительно независимой переменной функции ищется разложение решения в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки:

```
> Order:=3:
> eq:=(D@@2)(y)(x)+(a+b*x^2)*D(y)(x)+y(x)=0;
```

$$eq:=(\mathrm{D}^{(2)})(y)(x)+(a+b\,x^2)\,\mathrm{D}(y)(x)+\mathrm{y}(x)=0$$

```
> dsolve(eq,y(x),type=series);
```

$$\mathrm{y}(x)=\mathrm{y}(0)+\mathrm{D}(y)(0)\,x+(-\frac{1}{2}\,a\,\mathrm{D}(y)(0)-\frac{1}{2}\,\mathrm{y}(0))\,x^2+\mathrm{O}(x^3)$$

В решении дифференциального уравнения второго порядка, представленном рядом Тейлора, в качестве двух произвольных постоянных используются значения искомой функции и ее первой производной в точке $x=0:y(0),D(y)(0)$.
Решение задачи Коши или краевой задачи для дифференциального уравнения в системе Maple так же просто как и отыскание общего или приближенного решения. Для этого необходимо задать первый параметр команды dsolve() в виде множества, элементами которого являются само уравнение и все начальные или краевые условия. Решим задачу Коши и краевую задачу для следующего дифференциального уравнения второго порядка:

Таблица.12. **Значения опции** *метод* **при численном решении дифференциальных уравнений**

Значение	Описание
Rkf45	Метод Рунге-Кутта-Фальберга порядка 4-5
Dverk78	Метод Рунге-Кутта порядка 7-8

```
> eqn1:=diff(y(x),x$2)+k^2*y(x)=0;
```

$$eqn1 := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + k^2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

Задача Коши для этого дифференциального уравнения второго порядка требует задания в нулевой точке значения неизвестной функции и ее первой производной. Ее решение представлено ниже:

```
> eqn1:=diff(y(x),x$2)+k^2*y(x)=0;
```

$$eqn1 := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + k^2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve({eqn1,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \frac{\sin(k\,x)}{k}$$

Краевая задача для этого дифференциального уравнения второго порядка требует задания в двух точках, например, $x = 0$ и $x = 1$ значения неизвестной функции. Ее решение также получено с помощью команды dsolve():

```
> dsolve({eqn1,y(0),y(1)=1},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \frac{\sin(k\,x)}{\sin(k)}$$

Начальные или краевые условия задаются в виде уравнений, в левой части которых определен задаваемый параметр (значение неизвестной функции или ее производной необходимого порядка) в соответствующей точке, а в правой части значение этого параметра. Обратим внимание, что при задании производных в начальных или краевых условиях следует использовать оператор D - команда diff() здесь не употребляется.

Если точное решение задачи Коши или краевой задачи система Maple не смогла найти, а приближенное решение в виде ряда Тейлора нас не устраивает, то можно построить численное решение, с использованием команды dsolve(). Для этого следует задать опцию type=numeric, а с помощью опции method=*метод* определить используемый для построения численного решения метод. Параметр *метод* может принимать одно из значений представленных в таблице Табл.12, в которой также дано краткое описание соответствующего значению метода.

По умолчанию (если не задана опция *method*) применяется метод Рунге-Кутта-Фальберга порядка 4-5. Однако при использовании численного решения следует помнить, что все параметры дифференциального уравнения (символьные константы) должны быть

определены.Например, для задачи Коши уравнения *eqn1* предыдущего примера следует задать численное значение для параметра k.
Численное решение строится в форме процедуры Maple, поэтому следует некоторой переменной присвоить результат построения командой *dsolve()* численного решения в виде процедуры. В дальнейшем имя этой переменной можно использовать как имя процедуры для вычисления значения решения задачи Коши в некоторой точке, соответствующей значению независимой переменной функции решения. Этот значение передается в процедуру как ее параметр - после имени процедуры в круглых скобках. Следующий пример демонстрирует построение численного решения задачи Коши и его использование.

```
> eqn1:=diff(y(x),x$2)+k^2*y(x)=0;
```

$$eqn1 := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + k^2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

Переменной F присваиваем результат численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка (в нулевой точке задается значение неизвестной функции и ее первой производной):

```
> F:=dsolve({eqnq,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(x),type=numeric);
```

$$F := \mathbf{proc}(x\_rkf45)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

Если не присвоить параметру k конкретного числового значения, то попытка получить решения в точке, например $x = 1$, приведет к ошибке:

```
> F(1);
Error, (in F) global 'k' must be assigned to a numeric value
before obtaining a solution
```

Следует обязательно определить все символьные параметры дифференциального уравнения числовыми значениями перед использованием численного решения:

```
> k:=1:
> F(0);F(1);F(2);
```

$$[x = 0.,\ \mathrm{y}(x) = 0.,\ \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = 1.]$$

$$[x = 1.,\ \mathrm{y}(x) = 0.841471136026033850,\ \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = 0.540302304342744177]$$

$$[x = 2.,\ \mathrm{y}(x) = 0.909297642748657208,\ \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = -0.416146922604897218]$$

Обратите внимание, в каком виде построенная процедура численного решения выдает результаты - в виде списка значений независимой переменной, самой функции и ее производных (до порядка на единицу меньше порядка самого уравнения).

Глава III

Пакеты

III.1 Подключение пакетов Maple

Maple, как и любая другая программная система, имеет собственную архитектуру. Ядро, основная библиотека и пакеты - это все элементы, составляющие в совокупности Maple. Пользователь, работая в системе аналитических вычислений Maple постоянно "общается" с этими тремя компонентами: одни команды находятся в постоянно находящемся в памяти компьютера ядре, другие автоматически загружаются из основной библиотеки, а для выполнения третьих следует явным образом подключить соответствующий пакет. Все это в совокупности и составляет предмет организации Maple.

При запуске Maple в память компьютера загружается только ядро, являющееся его основным компонентом. В нем содержатся программы, без которых Maple не может функционировать, а также программы, реализующие основные низкоуровневые команды выполнения простых аналитических преобразований и используемые командами из основной библиотеки и пакетов. К ним относится интерпретатор языка Maple, программы работы с числовыми данными, а также программы, отображающие результаты выполнения команд Maple и выполняющие другие операции ввода/вывода. Ядро состоит из программ, написанных на языке C, и составляет около 10 % общего размера системы аналитических вычислений.

Остальная часть программ, реализующих функциональность Maple, написана на языке Maple и хранится в библиотеке, которая состоит из двух частей: основной библиотеки и многочисленных пакетов, в которых сгруппированы команды для выполнения определенных математических действий.

Основная библиотека содержит наиболее часто используемые команды Maple, которые загружаются автоматически, как только пользователь обращается к ним. В отличие от предыдущих версий не стоит заботиться об их явной загрузке. Программы на языке Maple представляют собой очень компактные процедуры, быстро загружающиеся в память и выполняющиеся с достаточно высокой скоростью, так что пользователь практически не может отличить, какая команда находится в ядре, а какая загружается из библиотеки. Если необходимая для выполнения математических преобразований команда не находится в ядре или основной библиотеке, то пользователю приходится явно подключать пакет или только одну программу из пакета, чтобы иметь возможность обратиться к требуемой команде.

Пакеты в Maple используются для удобства организации работы пользователя. Пакет представляет собой набор команд для решения задач, относящихся к определенным раз-

делам математики, или решения определенных задач графического представления информации, например, пакет *finance* служит для решения задач финансовой математики, в пакете *stats* собраны команды для статистической обработки результатов и т.д.
Для того, чтобы использовать команды какого-нибудь пакета, необходимо подключить его, так как они все находятся не в ядре системы Maple, а в специальных файлах. Подключение пакетов осуществляется с помощью команды *with(пакет)*; где в качестве параметра указывается имя соответствующего пакета. Может оказаться, что подключаемый пакет содержит команду с таким же именем, что и в ранее подключенном пакете. В этом случае в области вывода отображается сообщение о переопределении соответствующей команды, и результат ее действия будет соответствовать команде, находящейся в последнем подключенном пакете. Подключив пакет, в дальнейшем пользователь может вызывать все его команды, просто набирая их имя и требуемые для ее выполнения параметры в области ввода.
Если необходима какая-то конкретная команда пакета, то вместо подключения всего пакета целиком можно подключить одну эту команду с помощью следующего синтаксиса оператора with():
`пакет,имя_команды;`
В дальнейшем эта команда также может быть использована ссылкой только на ее имя, без указания пакета, в котором она находится.
Если пользователь не желает, чтобы команда постоянно находилась в памяти, можно загрузить ее только на время ее выполнения, после чего она будет выгружена из памяти. Для этого следует указать ее полное имя, состоящее из имени пакета и имени самой команды в следующем виде:
`имя_пакета[имя_команды](...);`
При следующем обращении к команде ее необходимо снова загрузить одним из трех указанных способов. Пример (ПIII.1) демонстрирует подключение пакета и вызов его команды.

Пример ПIII.1. *Подключение пакета*

```
> with(combstruct);
```

$[agfeqns,\ agfmomentsolve,\ agfseries,\ allstructs,\ count,\ draw,\ finished,\ gfeqns,\ gfseries,\ gfsolve,\ iterstructs,\ nextstruct]$

```
> bin:={B=Union(Z,Prod(B,B))}:
```

```
> count([B,bin,unlabelled],size=7);
```

$$132$$

Если пользователь не желает, чтобы отображались все команды подключаемого пакета (список команд некоторых пакетов может занимать целую страницу), то команду *with()* следует завершить двоеточием (:). Встроенные в Maple пакеты позволяют выполнять математические построения и преобразования, начиная от элементарной математики и заканчивая общей теорией относительности.

III.2 Пакет *linalg*

Пакет линейной алгебры *linalg* содержит команды создания матриц и векторов, предлагает большой набор функций для работы со структурой этих объектов, для выполнения основных матричных и векторных операций и для решения основных задач линейной алгебры: решение систем линейных уравнений, нахождения собственных векторов и собственных векторов матрицы, приведение матриц к специальным формам и т.д. И все эти действия можно выполнять с матрицами и векторами, элементы которых могут быть общими алгебраическими выражениями, получая результаты также в виде алгебраических выражений.
Все команды пакета линейной алгебры также работают с матрицами и векторами. В Maple матрицей считается двумерный массив, индексы которого изменяются от единицы. Аналогично, вектор - это одномерный массив с изменяющимся от единицы индексом. Определить матрицу или вектор в Maple можно двумя способами: либо с помощью команды *array()* стандартной библиотеки, либо командами *matrix()*и *vector()* пакета *linalg*.
Наиболее общий синтаксис команды *array()*, которая позволяет задавать одномерные массивы с индексами, изменяющимися в диапазонах целых (так положительных, так и отрицательных) чисел, следующий:
`array(диапазоны, список,опции);`
Все параметры необязательны и могут задаваться в произвольном порядке. Параметр *диапазоны* представляет собой целочисленные диапазоны изменения индексов массивов, задаваемых через запятую, - размерность массива равна количеству заданных диапазонов. Значения элементов массива задаются параметром *список* в виде списка для одномерных массивов или списка списков для многомерных массивов. В качестве значения параметра *опции* можно применять *symmetric, antisymmetric,identity* и diagonal. Они используются для задания массивов специального вида (симметричных, антисимметричных, единичных и диагональных). Для задания векторов и матриц с помощью этой функции следует указывать диапазоны изменения индексов, начинающиеся с единицы.

```
> vec:=array(1..2,[1,2]);
```

$$vec := [1, 2]$$

```
> matr:=array(1..2,1..2,[[1,2],[10,15]]);
```

$$matr := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Для задания тех же векторов и матрицы можно использовать соответственно команды vector() и matrix() из пакета linalg, предварительно подключив его командой with(linalg). Синтаксис этой команды следующий:
`vector(n,[элемент1, элемент2,...]);`
`matrix(n,m,[элемент1, элемент2,...]);`
Здесь целые величины n и m задают размерности вектора и матрицы, а значения их элементов задаются в виде простого списка.

```
> vec:=vector(2,[1,2]);
```

$$vec := [1, 2]$$

```
> matr:=matrix(2,2,[1,2,10,15]);
```

$$matr := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Значения элементов вектора или матрицы необязательно задавать при создании этих объектов. Можно позднее с помощью общепринятой индексной ссылки на элементы вектора или матрицы (в квадратных скобках после имени вектора или массива задаются индекс(ы) требуемого элемента) присвоить им новые значения или использовать уже присвоенные значения в вычислениях.

```
> vec[1]:=5;
```

$$vec_1 := 5$$

```
> eval(vec);
```

$$[5, 2]$$

Обратите внимание, что для отображения содержимого вектора vec использована команда eval(), так как переменная, содержащая сложные объекты, каковыми являются и векторы, и матрицы, вычисляется не полностью, а только до своего имени. Эту же команде следует применять и в случае, если необходимо посмотреть содержимое матрицы. Для вычисления некоторых характеристик матриц нужно осуществлять преобразование самих матриц, например, прибавление к одной строке матрицы линейную комбинацию некоторых других, или выделять некоторые подматрицы, например, при вычислении миноров матрицы. Для этих задач можно использовать ряд команд, содержащихся в пакете linalg.
Выяснить размерности (количество строк и столбцов) матрицы помогут соответственно команды rowdim() и coldim(), а определить количество элементов вектора можно командой vectdim(). Единственным передаваемым в эти команды параметром является идентификатор матрицы или вектора.Следующий пример демонстрирует использование этих команд:

```
> vectdim(vec);
```

$$2$$

```
> coldim(matr);
```

$$2$$

Иногда необходимо удалить или, наоборот добавить в матрицу несколько строк или столбцов. Удалить строки или столбцы с номерами от i до j из матрицы A можно соответственно командами delrows(A,i..j) и delcols(A,i..j). Для удаления одной строки или одного столбца следует использовать диапазон $i...i$. Добавить строки и столбцы в матрицу A можно командой extend(A,rows,cols,expr),в которой параметры rows и cols являются целыми числами, включая 0, и представляют соответственно количество добавляемое количество строк и столбцов. Параметр expr - выражение, значение которого используется в качестве значений добавляемых элементов строк и столбцов.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,1);
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> delcols(A,1..1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> A1:=extend(A,1,0,-1);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Большая группа команд позволяет выделять из матрицы подструктуры: столбцы, строки, подматрицы и миноры. Для выделения строки с заданным номером следует применять команду row(A,i), а чтобы получить нужный столбец можно использовать команду col(A,j), Здесь A - матрица а параметры i и j являются номерами соответственно выделяемой строки или столбца. Формирование подматрицы, состоящей из элементов столбцов с номерами от $i1$ до $i2$ и строк с номерами от $j1$ до $j2$, осуществляется командой submatrix(A,i1..i2,j1..j2). Существует аналогичная команда для выделения вектора, состоящего из элементов с номерами от $i1$ до $i2$ исходного вектора,- subvector(vec,i1..i2). Матрица минора элемента с индексами (i, j) получается командой minor(A,i,j). Напомним, что минор получается из исходной матрицы вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Отметим, что все перечисленные команды не изменяют структуру исходной матрицы, а только выделяют из нее соответствующие подструктуры. Примеры использования этих команд приведены ниже.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,3,[1,1,-1,1,1,-1,1,1,-1,-1,-1,-1]);
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> row(A,4);
```

$$[-1, -1, -1]$$

```
> A1:=submatrix(A,2..3,2..3);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> A2:=minor(A,3,2);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Пакет linalg содержит ряд команд, предназначенных для выполнения линейных преобразований над строками и столбцами исходной матрицы. Команда addcol(A,j1,j2,expr) создает новую матрицу из матрицы A путем прибавления к столбцу номер $j1$ столбца с номером $j2$, умноженного на значение параметра expr. Команда для выполнения аналогичных действий над строками матрицы имеет следующий синтаксис: addrow(A,i1,i2,expr). Умножить столбец с номером j на значение выражение expr можно командой mulcol(A,j,expr), а то же самое действие для строки с номером i выполняется командой mulrow(A,i,expr). Для перестановки местами двух строк или двух столбцов матрицы A следует обратиться соответственно к командам swaprow(A,i1,i2) или swapcol(A,j1,j2). Эти команды полезны при приведении матрицы к треугольному виду или вычисления ее определителя разложением по строкам и столбцам.

> Команды пакета linalg представляют возможность выполнения основных матричных и векторных операций: перемножение матриц, умножение матрицы на вектор, вычисление транспонированной и обратной матриц, а также вычисление определителя квадратной матрицы.

Сложение двух матриц осуществляется двумя способами: командой add() и командой evalm(). Отметим, что команда evalm() служит для вычисления матрицы или вектора на уровне их элементов и используется для вычисления любых возможных действий над матрицами, заданными операторами сложения (+), вычитания (-), умножения `{&*}`, деления (/) и возведения в степень `^`. Обратим внимание, что для выполнения некоммутативного умножения матриц используется операция умножения со знаком `&*`, а не знаком коммутативного умножения `*` чисел. Итак, сложить две матрицы одинаковой размерности можно либо командой evalm(A+B), либо командой add(A,B). Последнюю команду можно использовать для вычисления линейной комбинации двух матриц со скалярными множителями - add(A,B,scalar1,scalar2). В этом случае результатом будет матрица, вычисляемая по следующей формуле:
`scalar1*A+scalar2*B`.
Умножение матрицы на матрицу (или вектор) выполняется командой multiply(A,B) или `evalm(A&*B)`. При этом, естественно, размерности матриц-сомножителей должны быть таковыми, чтобы соответствующие операции существовали.
Возвести квадратную матрицу в степень n можно командой `evalm(A^n)`. Для вычисления обратной матрицы к заданной можно воспользоваться либо командой inverse(A), либо командой evalm(1/M). Транспонированная матрица вычисляется с помощью обращения к команде transpose(A). Определитель и ранг матрицы можно получить, обратившись к командам det(A) и rank(A), соответственно.
Одной из важных характеристик квадратных матриц являются собственные числа и соответствующие им собственные векторы. Для вычисления собственных чисел и векторов числовой квадратной матрицы можно воспользоваться отложенной командой Eigenvals(A,V) основной библиотеки Maple. В ней первый параметр представляет собой матрицу, для которой вычисляются собственные числа, а второй необязательный параметр является матрицей, столбцы которой содержат собственные векторы, соответствующие собственным числам. Для получения результата применения этой отложенной команды следует использовать команду evalf(). Пример вычисления с ее помощью собственных чисел и собственных векторов представлен ниже:

```
> with(linalg):

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> A:=matrix(3,3,[1, 2, 3,
-1,-2,3,0,2,9]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> evalf(Eigenvals(A,V));
```

$$[0.614232441,\ -2.066800990,\ 9.452568549]$$

```
> evalm(V);
```

$$\begin{bmatrix} 0.955495034 & -0.5719289135 & 0.4022344932 \\ -0.2869586740 & 1.203146218 & 0.2228332916 \\ 0.06843945323 & -0.2174334239 & 0.9847493465 \end{bmatrix}$$

Для получения собственных чисел и векторов символьных матриц следует соответственно использовать команды eigenvals(A) и eigenvects(A). Результатом выполнения первой команды будет массив, содержащий собственные числа матрицы, а результатом выполнения второй команды будет массив строк, элементами которых являются собственное число, его кратность и соответствующий собственному числу собственный вектор.

```
> with(linalg):

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected

> A:=matrix(2,2,[0, 1, a,b]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(A);
```

$$\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4\,a}}{2},\ \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 + 4\,a}}{2}$$

```
> eigenvects(A);
```

$$\left[\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4\,a}}{2},\ 1,\ \left\{\left[-\frac{\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 + 4\,a}}{2}}{a},\ 1\right]\right\}\right],\ \left[\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 + 4\,a}}{2},\ 1,\ \left\{\left[-\frac{\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4\,a}}{2}}{a},\ 1\right]\right\}\right]$$

В пакете есть специальная команда linsolve() решения системы линейных алгебраических уравнений. Эта команда решает матричное уравнение $Ax = b$. Матрица A и вектор b передаются ей в качестве параметров:

`linalg(A,b,'r',v);`

Размерность вектора b должна равняться числу строк матрицы A. Неизвестная переменная r, если задана, содержит после решения ранг матрицы A. Если ранг матрицы меньше количества неизвестных, определяемых количеством столбцов матрицы A, то решение представляется в параметрической форме. Если задан необязательный четвертый параметр `v`, представляющий имя, то параметры задаются в виде `_v[1], _v[2],...`, иначе используется имя по умолчанию, равное символу (t). Результатом выполнения команды будет вектор, в случае существования решения, и пустая последовательность - в

противоположном случае.
Эта команда может решать и матричное уравнение вида $AX = B$, в котором количество строк матрицы B равняется количеству строк матрицы A, количество столбцов матрицы B равняется количеству столбцов матрицы неизвестных X, а число строк матрицы X равняется числу столбцов матрицы A. В этом случае, по существу, решается последовательность уравнений A `col(X,i)=col(B,i)`, где i пробегает значения от 1 до количества столбцов матрицы B. Результатом будет матрица, столбцы которой являются решением соответствующей линейной системы из указанной последовательности систем уравнений. Если решения не существует, то результатом будет пустая последовательность.

Пример ПIII.2. *Решение систем линейных алгебраических уравнений*

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> A:=matrix([[1,2],[1,3]]):
> b:=vector([1,-2]):
> linsolve(A,b);
```

$$[7, -3]$$

```
> B:=matrix([[1,1],[-2,1]]):
> linsolve(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A:=matrix([[5,7],[0,0]]):
> b:=vector([3,0]):
> linsolve(A,b,'r');
```

$$\left[\frac{3}{5} - \frac{7}{5}\_t_1,\ \_t_1\right]$$

```
> r; # Ранг матрицы A
```

$$1$$

```
> linsolve(A,b,'r',par);
```

$$\left[\frac{3}{5} - \frac{7}{5}\,par_1,\ par_1\right]$$

Пакет linalg содержит более ста полезных команд выполнения матричных операций, а также структурных преобразований матриц.

III.3 Пакет LinearAlgebra

Все команды пакета LinearAlgebra можно вызывать непосредственно по имени, предварительно подключив все его команды функцией
> `with(LinearAlgebra);`
или отдельную команду с использованием синтаксиса

> `with(LinearAlgebra, имя_команды);`

Можно вызывать команду, предварительно не подключая ее, а используя длинное имя

> `LinearAlgebra[имя_команды](параметры);`

> `LinearAlgebra['имя_команды'](параметры);`

Последняя форма (имя команды, заключенное в одинарные кавычки), вызывает соответствующую команду пакета, даже если в текущем сеансе используется какой-либо объект с таким же именем.

Пакет LinearAlgebra реализован в виде модуля, новой языковой конструкции Maple, реализующей элементы объективно-ориентированного программирования. Каждая команда является методом объекта LinearAlgebra, а поэтому ее можно вызывать, используя специальную операцию `:-` обращения к методу объекта:

> `LinearAlgebra :-имя_команды(параметры);`

В этом случае вызываемая команда также будет загружена, не конфликтуя с объектом другого типа, созданного в текущем сеансе.

Основные типы данных

Основные типы данных, с которыми работают команды пакета LinearAlgebra, являются скаляры, представляющие как числа, так и алгебраические выражения, а также матрицы и векторы, определяемые на базе нового типа данных r-таблицы. Матрицы и векторы создаются с помощью соответствующих конструкторов.

Конструктором матриц является команда Matrix() (обязательно с заглавной буквы), синтаксис которой имеет следующий вид:

`Matrix(r, c, init, ro, sc, sh, st, o, dt, f, a);`

Семантика параметров и их допустимых значений представлены в таблице Табл.13.

Все параметры являются необязательными, и в случае их отсутствия создается матрица размерности 0×0. Собственно говоря, для создания матрицы важны первые три параметра. Остальные используются различными командами для ускорения ее обработки.

Пример ПIII.3. *Создание векторов*

```
> with(LinearAlgebra):
> Matrix(2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(2,3);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(1..1,1..4,6);
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix([[1,2,3],[4,5,6]]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(2,(i,j)->x^(i+j));
```

$$\begin{bmatrix} x^2 & x^3 \\ x^3 & x^4 \end{bmatrix}$$

Создать вектор можно конструктором Vector() со следующим синтаксисом:

```
Vector(d, init, ro, sh, st, dt, f, a,o);

Vector[column](d, init,ro, sh, st, dt, f, a, o);

Vector[row](d, init, ro, sh, st, dt, f, a, o);
```

В пакете LinearAlgebra различаются векторы-столбцы, задаваемые с помощью первых двух форм конструктора, и векторы-строки, для задания которых служит третья форма конструктора. Их можно определять только с помощью первой формы, задавая соответствующее значение последнего параметра `o: column` или row. Первый параметр d задает размерность вектора и может принимать только целые положительные значения, большие или равные 1. Остальные параметры соответствуют аналогичным в конструкторе матриц.

Пример ПIII.4. *Создание векторов*

```
> with(LinearAlgebra):
> Vector(2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> Vector(1..3,5,orientation=row);
```

$$[5, 5, 5]$$

```
> Vector[row]([1,2,3]);
```

$$[1, 2, 3]$$

```
> Vector(2,(i)->x^i);
```

$$\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

При интерактивной работе в Maple иногда не совсем удобно создавать матрицы и векторы, обращаясь к их конструктору. Разработчики пакета LinearAlgebra представили пользователю возможность использования краткой формы задания векторов и матриц:
`<a,b,c>` создает матрицу или вектор по строкам;
$< a|b|c >$ создает матрицу или вектор по столбцам.
Если величины, задаваемые в угловых скобках, не являются скалярами, то создается матрица, в противном случае вектор.

Пример ПIII.5. *Краткая форма задания векторов и матриц*

Таблица.13. Параметры конструктора матриц

Параметр	**Описание**
r	Неотрицательное целое или диапазон целых чисел, начинающийся с 1. Представляет количество строк в матрице
c	Неотрицательное целое или диапазон целых чисел, начинающийся с 1. Представляет количество столбцов в матрице
init	Задает значения элементов матрицы. Может быть одним из следующих объектов Maple: процедурой, входными параметрами которой является пара целых положительных чисел, определяющих индексы элемента, а возвращаемым значением величина этого элемента, например, (i,j)->i*j; алгебраическим выражением, которое вычисляется как процедура с двумя параметрами, возвращающая значение элемента; таблицей, элементы которой с неотрицательными индексами представляют значения соответствующих элементов матрицы; множеством уравнений вида (i,j)=*значение*, в которых неотрицательные индексы представляют индексы соответствующего элемента матрицы; массивом на основе таблицы или r-таблицы, созданным, соответственно, либо командой array(), либо командой Array(), у которого индексы начинаются с 1; матрицей на основе r-таблицы, т.е. матрицей, созданной конструктором Matrix(); списком, элементы которого интерпретируются как значения первой строки матрицы, или списком, элементами которого являются списки интерпретируемые как последовательные строки матрицы
ro	Задается в виде readonly или readonly=true и определяет, что значения элементов матрицы, определенные при ее создании, не могут быть изменены в дальнейшем
sc	Уравнения вида scan=*имя* или scan=*список*, определяющее структуру и/или порядок данных при интерпретации начальных значений, задаваемых параметром init
sh	Уравнения вида shape=*имя* или shape=*список*, определяющее одну или более встроенных или пользовательских индексных функций, задающих расположение в памяти элементов матрицы
st	Уравнения вида storage=*имя*, где *имя* является одним из допустимых режимов памяти, определяя тем самым требования памяти для размещения элементов матрицы
o	Уравнения вида order=*имя*, где *имя* может быть либо C_order, либо Fortran_order, задавая хранение матрицы в памяти, соответственно по строкам или столбцам
dt	Уравнения вида datatype=*имя*, где *имя* может быть любым типом Maple, определяющим тип данных, хранимых в матрице
f	Уравнения вида fill=*значение*, определяющее значение, присваиваемое неопределенным элементам матрицы. По умолчанию оно равно 0
a	Уравнения вида attributes=*список*, определяющее атрибуты (положительно-определенная, эрмитова и т.д.) с которыми матрица была создана

```
> with(LinearAlgebra):
> V1:=<1,2,3>; # Создание вектора-столбца
```

$$V1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> V2:=<1|2|3>; # Создание вектора-строки
```

$$V2 := [1, 2, 3]$$

```
> M1:=«1|2>,<3|4»; # Создание матрицы по строкам
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> M2:=«1,3>|<2,4»; # Создание матрицы по столбцам
```

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> <M2|M1>; # Создание матрицы из двух других
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Существуют специальные типы матриц, поддерживаемые пакетам LinearAlgebra. Для создания специальных типов матриц и векторов - единичных, нулевых, матриц и векторов констант и скалярных - можно использовать специальные конструкторы, хотя объекты указанных типов можно создать и при помощи общих конструкторов. Пример (ПIII.6) демонстрирует все типы специальных конструкторов.

Пример ПIII.6. *Специальные типы векторов и матриц*

```
> with(LinearAlgebra):
> IdentityMatrix(2,2); # Единичная матрица
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ZeroMatrix(2,3); # Нулевая матрица
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> ConstantMatrix(6,2); # Матрица-константа
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> ScalarMatrix(a^2,2); # Скалярная матрица
```

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

```
> UnitVector[row](2,3); # Единичный вектор
```

$$[0, 1, 0]$$

```
> ZeroVector[row](3); # Нулевой вектор
```

$$[0,\ 0,\ 0]$$

```
> ConstantVector[row](5,5); # Вектор-константа
```

$$[5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5]$$

```
> ScalarVector[row](x^2+y^2,3,4); # Скалярный вектор
```

$$[0,\ 0,\ x^2+y^2,\ 0]$$

Элементарные операции с матрицами и векторами

Как уже отмечалось ранее, основные операции с матрицами в пакете LinearAlgebra выполняются проще, чем такие же в пакете linagl. Это связано с тем, что идентификаторы векторов и матриц здесь вычисляются не до уровня имени, а непосредственно до уровня вычисления их компонентов. В связи с этим возможно выполнение поэлементного сложения вычитания и составления линейных комбинаций векторов и матриц одинаковой размерности с использованием обычных арифметических операций.

Пример ПIII.7. *Элементарные операции с векторами и матрицами*

```
> with(LinearAlgebra):
> M1:=«1|2>,<3|4»;
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> M2:=«10|7>,<8|15»;
```

$$M2 := \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$

```
> M1+M2;
```

$$\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 11 & 19 \end{bmatrix}$$

```
> 3.1*M1+5*M2;
```

$$\begin{bmatrix} 53.1000000000000014 & 41.2000000000000029 \\ 49.2999999999999972 & 87.4000000000000057 \end{bmatrix}$$

```
> V1:=<1|4>;
```

$$V1 := [1,\ 4]$$

```
> V2:=<3|8>;
```

$$V2 := [3,\ 8]$$

```
> 3*V1-6*V2;
```

$$[-15,\ -36]$$

```
> V3:=<3,8>;
```

$$V3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

```
> V1+V3; #Нельзя получит линейную
> комбинацию вектора-строки и
> вектора-столбца
```

```
Error, (in rtable/Sum) invalid arguments
```

Если складывается скаляр с матрицей, то это равносильно сложению матрицы с единичной матрицей, элементы которой умножены на заданный скаляр, вектор нельзя складывать со скаляром:

```
> with(LinearAlgebra):
> 10+«2|5|11>,<4|6|7»;
```

$$\begin{bmatrix} 12 & 5 & 11 \\ 4 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> 10+IdentityMatrix(2,3)+«2|5|11>,<4|6|7»;
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 11 \\ 4 & 17 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> 2+<1,2>;
```

```
Error, (in rtable/Sum) invalid arguments
```

Так как произведение матриц (имеется в виду операция скалярного умножения) не является коммутативной, то использование операции коммутативного умножения (*) для векторов и матриц приводит к ошибке. (Исключение допускается только для умножения матрицы на саму себя, причем в этом случае выполняется операция скалярного умножения). Коммутативное умножение можно использовать для перемножения скаляра и матрицы или вектора. В этом случае все элементы этих объектов умножаются на соответствующий скаляр.

```
> with(LinearAlgebra):
> -3*<1|2|3>;
```

$$[-3,\, -6,\, -9]$$

```
> 4*«7,8>|<1,6*t»;
```

$$\begin{bmatrix} 28 & 4 \\ 32 & 24\,t \end{bmatrix}$$

Однако если скаляр содержит неопределенную переменную, то перемножения не происходит, так как Maple не знает какой объект в дальнейшем эта переменная может содержать. Для выполнения такого умножения следует использовать команду simplify() с параметром symbolic или опцией assume=scalar:

```
> with(LinearAlgebra):
> mull:=x^2*<1|2|3>;
```

$$mull := x^2\,[1,\, 2,\, 3]$$

```
> simplify(mull,symbolic);
```

$$[x^2,\, 2\,x^2,\, 3\,x^2]$$

```
> simplify(mull,assume(x,scalar));
```

$$[x^{\char126 2},\ 2\,x^{\char126 2},\ 3\,x^{\char126 2}]$$

Выполнить некоммутативное умножение в Maple6 можно операцией, символом которой является точка (.). Она никогда не меняет сомножители местами, поэтому произведения $x.y.z$ и $x.z.y$ не являются тождественными:

```
> with(LinearAlgebra):
> m1:=x.y.z;
```

$$m1 := x\ .\ y\ .\ z$$

```
> m2:=x.z.y;
```

$$m2 := x\ .\ z\ .\ y$$

```
> if(m1=m2) then print("истина")                              else
> print("ложь") end if;
```

"ложь"

Эта же операция, примененная к матрицам и векторам выполняет их скалярное произведение.

```
> with(LinearAlgebra):
> <1,3>.<4|6>; # Вектор-столбец умножается на вектор-строку
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

```
> <4|6>.<1,3>; # Вектор-строка умножается на вектор столбец
```

$$22$$

```
> «3,-1>|<-8,15>|<9,10».«1,x,y>|<4,-7,2»; # Матрица 2x3 умножается
> на матрицу 3x2
```

$$\begin{bmatrix} 3-8\,x+9\,y & 86 \\ -1+15\,x+10\,y & -89 \end{bmatrix}$$

Для получения степени квадратной матрицы можно последовательно применить операцию скалярного умножения необходимое число раз или операцию возведения в степень (`^`):

```
> with(LinearAlgebra):
> M:=«0.2|0.8>,<0.7|0.5»;
```

$$M := \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

```
> M.M.M.M.M;
```

$$\begin{bmatrix} 0.679599999999999982 & 0.902320000000000011 \\ 0.789529999999999842 & 1.01797000000000004 \end{bmatrix}$$

```
> M^5;
```

$$\begin{bmatrix} 0.679599999999999982 & 0.902320000000000122 \\ 0.789529999999999842 & 1.01797000000000004 \end{bmatrix}$$

Показатель степени может быть и отрицательным целым числом, что позволяет вычислять обратную матрицу и ее степени:

```
> with(LinearAlgebra):
> M:=«0.2|0.8>,<0.7|0.5»;
```

$$M := \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

```
> M^(-1);
```

$$\begin{bmatrix} -1.08695652173913060 & 1.73913043478260887 \\ 1.52173913043478270 & -0.434782608695652272 \end{bmatrix}$$

```
> %.M;
```

$$\begin{bmatrix} 1. & -0.111022302462515654\,10^{-15} \\ -0.555111512312578272\,10^{-16} & 1. \end{bmatrix}$$

Для выделения элементов матрицы и ее подматриц используется индексная запись, причем в качестве индекса можно применять диапазон, что позволяет выделять целые блоки исходной матрицы:

```
> with(LinearAlgebra):
> M:=Matrix(5,(i,j)->3*i-j);
```

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> M[3,2]; # Выбор элемента матрицы
```

$$7$$

```
> M[3,1..-1]; # Выбор третьей строки
```

$$[8, 7, 6, 5, 4]$$

```
> M[1..-1,2]; # Выбор второго столбца
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

```
> M[2..3,2..4]; # Выбор блока размерности2x3
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Присваивание новых значений элементам матрицы также осуществляется с помощью индексов, причем и здесь можно использовать диапазон. Главное, чтобы размерность матрицы в левой части оператора присваивания соответствовала размерности матрицы в правой части.

Возможность выбора и присваивание значений целым строкам или столбцам используется для осуществления операций со строками или столбцами матрицы.

Пример ПIII.8. *Операции со строками матриц*

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> M:=Matrix(3,(i,j)->i*5+j-5);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

```
> M[[1,2],1..-1]:=M[[2,1],1..-1]; # Перестановка местами строк 1 и 2
```

$$M_{[1,2],\,1..-1} := \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> M;
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

```
> M[3,1..-1]:=3*M[3,1..-1]; # Умножение строки 3 на число 3
```

$$M_{3,\,1..-1} := [33,\, 36,\, 39]$$

```
> M;
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 33 & 36 & 39 \end{bmatrix}$$

```
> M[3,1..-1]:=M[3,1..-1] -16*M[2,1..-1]; # Вычитание из строки 3 строки
> 2, умноженной на 16
```

$$M_{3,\,1..-1} := [17,\, 4,\, -9]$$

```
> M;
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 17 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Все перечисленные операции можно выполнять с помощью команд пакета LinearAlgebra, которые рекомендуется использовать при программировании в Maple, хотя и допустимо их использование при интерактивной работе. Неполный список команд допустимых операций над матрицами и векторами приведен в таблице Табл.14

III.4 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Мы знакомы с универсальной командой решения обыкновенных дифференциальных уравнений dsolve(). С ее помощью можно получить общее решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, решать задачи Коши и краевые задачи. Эта команда всегда стремится найти общее решение в аналитическом виде и использовать его для построения краевой задачи или задачи Коши. Однако не всегда удается для обыкновенного дифференциального уравнения найти общее решение в замкнутой форме, и более того, существуют дифференциальные уравнения, для которых вообще невозможно построить общее решение в аналитическом виде. В таком случае прибегают к приближенным методам решения, которые реализуются той же командой dsolve() с соответствующими опциями (в форме рядов, с использованием численных методов типа

Таблица.14. Команды выполнения операций над матрицами и векторами

Название команды	**Описание**
DeleteRow	Удаление строки матрицы
DeleteColumn	Удаление столбца матрицы
Row	Выделение строки матрицы
Column	Выделение строки матрицы
SubMatrix	Выделение подматрицы из заданной матрицы
SubVector	Выделение подвектора из заданного вектора
ScalarMultiply	Умножение матрицы/вектора на скаляр
MatrixVectorMultiply	Скалярное произведение матрицы на вектор-столбец
VectorMatrixMultiply	Скалярное произведение вектора-строки на матрицу
MatrixMatrixrMultiply	Скалярное произведение матрицы на матрицу
MatrixInverse	Вычисление обратной матрицы
Determinant	Вычисление определителя матрицы
Minor	Выделение миноров матрицы
ConditionNumber	Вычисление числа обусловленности матрицы
Eigenvalues	Вычисление собственных значений матрицы
Eigenvectors	Вычисление собственных векторов

Рунге-Кутта различной точности). После чего полученное в виде процедуры Maple решение можно использовать для построения таблицы его значений или отобразить в форме графика командой odeplot() из пакета графических команд plots().

Пример ПIII.9. *Численное решение системы дифференциальных уравнений*

```
> dif1:=diff(x(t),t)=x(t)-y(t);
```

$$dif1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)$$

```
> dif2:=diff(y(t),t)=x(t)+y(t);
```

$$dif2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t)$$

```
> inicond:=x(0)=1,y(0)=1;
```

$$inicond := \mathrm{x}(0) = 1,\ \mathrm{y}(0) = 1$$

```
> sol:=dsolve({dif1,dif2,inicond},{x(t),y(t)},type=numeric);
```

$$sol := \mathbf{proc}(x\_rkf45)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

```
> sol(0);sol(1);sol(2);sol(3);
```

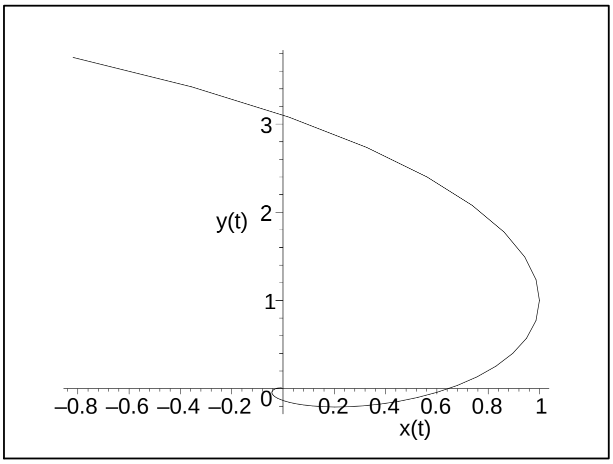
$$[t = 0.,\ \mathrm{x}(t) = 1.,\ \mathrm{y}(t) = 1.]$$

$$[t = 1.,\ \mathrm{x}(t) = -0.818662182163631402,\ \mathrm{y}(t) = 3.75604913325399004]$$

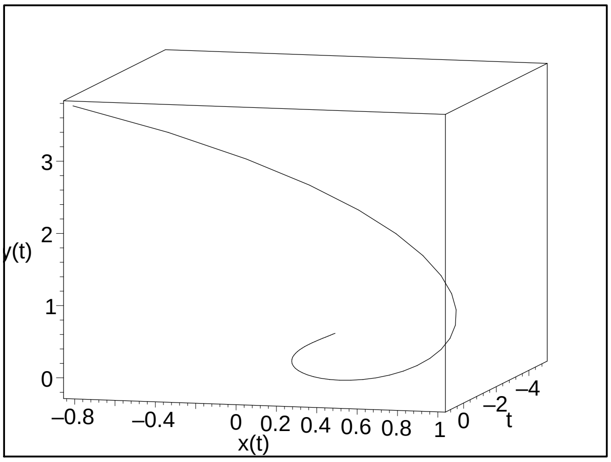
$$[t = 2.,\ \mathrm{x}(t) = -9.79378355381787812,\ \mathrm{y}(t) = 3.64391365777240317]$$

$$[t = 3.,\ \mathrm{x}(t) = -22.7189934183264590,\ \mathrm{y}(t) = -17.0500719979047837]$$

```
> with(plots):
> # Фазовый портрет системы
> odeplot(sol,[x(t),y(t)],t=-5..1,labels=["x(t)","y(t)"],color=black);
```




```
> # Решение системы в пространстве
> odeplot(sol,[t,x(t),y(t)],-5..1,
> labels=["t","x(t)","y(t)"],color=black,axes=BOXED,orientation=[15,80])
> ;
```



Оказывается, для некоторых дифференциальных уравнений реализованные в команде dsolve() приближенные методы не дают удовлетворительного результата в связи с накоплением погрешности при их использовании. В таких случаях приходится либо разрабатывать специальные методы приближенного интегрирования дифференциального уравнения, либо упрощать математическую модель явления, вводя некоторые ограничения, либо пытаться преобразовать дифференциальное уравнение, приведя его к виду, для которого можно построить удовлетворительное приближенное решение.

Пакет DEtools содержит набор команд для преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений к специальному виду, для исследования гамильтоновых систем, для применения аппарата алгебр Ли при интегрировании дифференциальных уравнений, для работы с дифференциальными операторами и для построения различных видов графиков решения дифференциального уравнения и систем дифференциальных уравнений. Все перечисленные возможности пакета, кроме последней, с большой степенью вероятности представляют интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений, тогда как возможность отображения решения дифференциального уравнения без явного построения численного решения в виде процедуры Maple представляет интерес для большого круга технических специалистов, работающих в разных областях. В этом разделе мы и остановимся только на графических возможностях пакета DEtools.

Они включают команды DEdlot() и DEplot3d() для построения графиков решений систем дифференциальных уравнений, POEplot() для решения уравнений в частных производных и его отображения, dfieldplot() и phaseportrait() для отображения, соответственно, поля направлений и фазового портрета систем дифференциальных уравнений.
Команда DEplot() численно решает как одно обыкновенное дифференциальное уравнение любого порядка, так и нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в этом случае должна быть только одна независимая переменная, т.е. переменная от которой зависят искомые функции системы. Эта команда может использоваться с различным синтаксисом:
```
DEplot(deqns, vars, trange, inits, eqns);
DEplot(deqns, vars, trange, inits, xranges, eqns);
DEplot(deqns, vars, trange, xranges, eqns);
```
Параметр deqns задает либо одно дифференциальное уравнение произвольного порядка, либо систему в виде списка/множества, элементы которого представляют дифференциальные уравнения первого порядка, образующие систему.
Зависимые переменные системы или дифференциальные уравнения, т.е. искомые функции, задаются параметром vars. В случае системы они должны быть представлены в виде списка/множества.
Параметром trange определяется диапазон изменения независимой переменной в виде: $t = a..b$. В этом уравнении t задает имя используемой независимой переменной, а числовые параметры a и b определяют диапазон ее изменения. Еще раз напомним, что команда DEplot() работает с системой, в которой все неизвестные функции зависят от *одной* переменной.
Начальные условия определяются параметром inits, который представляет список, элементами которого являются списки (список списков). Каждый такой элемент-список определяет интегральную кривую дифференциального уравнения или системы, которая отображается на графике. Количество элементов-списков параметра inits соответствует количеству интегральных кривых на графике. Граничные условия задаются также, как и для команды dsolve(), через дифференциальный оператор D. Например, следующий список определяет начальные условия для двух интегральных кривых одного дифференциального уравнения третьего порядка с неизвестной функцией z(x):
```
[[z(0)=1,D(z)(0)=2, (D$2)(z)(0)=0.5], [z(1)=1,D(z)(1)=2,(D$2)(z)(1)=0.5]]
```
Параметры xranges, а их может быть столько, сколько неизвестных функций в системе, задают диапазоны изменения неизвестных функций и используются для завершения процесса интегрирования. Численное интегрирование осуществляется с заданным шагом, который по умолчанию равен abs(b-a)/20, где числа a и b задаются в параметре trange. Как только при очередном шаге значение какой-либо неизвестной функции выходит за пределы заданного в соответствующем параметре диапазона ее изменения, процесс интегрирования останавливается. Параметры xranges можно задавать в одной из двух форм:
```
x(t)=x1..x2
x=x1..x2
```
В них x представляет имя неизвестной функции дифференциального уравнения или системы, t - имя независимой переменной, а числа $x1$ и $x2$ задают, соответственно, нижнюю и верхнюю границу изменения неизвестной функции $x(t)$.
Необязательным параметром eqns задается ряд опций, определяющий общий вид графика решения: цвет линии интегральной кривой, шаг интегрирования, влияющий на гладкость отображения кривой, что и как откладывается по осям координат двумерного

графика и т.д. Они, как и все опции в Maple, задаются в виде уравнений, в которых в левой части стоит имя опции, а в правой - ее значение. Кроме некоторых специальных опций они в основном совпадают с опциями команды plot() пакета plots, а также с опциями, которые можно задавать при построении численного решения (type=numeric) командой dsolve().

III.5 Пакет student

Пакет student разрабатывался специально для студентов, чтобы предоставить набор команд для пошаговой реализации основополагающих математических методов, изучаемых в курсе высшей математики. Он позволяет приближать интегралы правыми и левыми суммами, производить вычисление интегралов заменой переменной и интегрированием по частям, получать приближенное значение определенных интегралов методами прямоугольников, трапеций и Симпсона, находить максимальные значения функции на заданном интервале и т.д. Команды этого пакета освобождают студента от выполнения некоторых “механических” операций, например вычисления производных, и концентрирует его внимание на правильном применении необходимых правил вычисления математических величин, например интегралов. В него входят следующие команды.
D, Diff, Doubleint, Int, Limit, Lineint, Point, Product, Sum, Tripleint, changevar, combine, completesquare, distance, equate, extrema, integrand, intercept, intparts, isolate, leftbox, leftsum, makeproc, maximize, middlebox, middlesum, midpoint, minimize, powsubs, rightbox, rightsum, showtangent, simpson, slope, summand,trapezoid
Мы не будем рассматривать каждую команду этого пакета: их назначение следует из их имен. Рассмотрим несколько примеров, которые дадут представление об этом пакете.
Пусть необходимо найти значение следующего определенного интеграла

$$\int_0^1 \frac{3}{4}x - x^2 dx$$

на основе его определения через центральную сумму. Прежде всего определим подынтегральную функцию и построим для интеграла от нее на заданном интервале центральную сумму, используя n центральных прямоугольников:

```
> with(student):
> f:=x->3/4*x-x^2;
```

$$f := x \to \frac{3}{4}\,x - x^2$$

```
> midsum:=middlesum(f(x),x=0..1,n);
```

$$midsum := \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{3\,(i+\frac{1}{2})}{4\,n} - \frac{(i+\frac{1}{2})^2}{n^2} \right)}{n}$$

Эту сумму можно вычислять при различных значения=x параметра n, получая приближенное значение интеграла. Для точного значения необходимо вычислить ее предел при $n \to \infty$:

```
> with(student):
> Limit(midsum,n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{3\,(i+\frac{1}{2})}{4\,n} - \frac{(i+\frac{1}{2})^2}{n^2} \right)}{n}$$

```
> value(%);
```

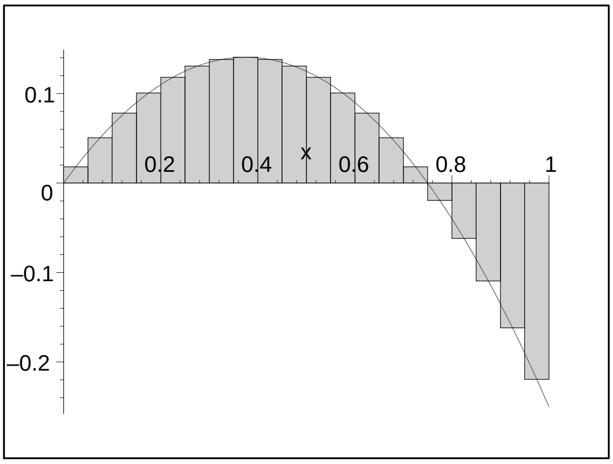
$$\frac{1}{24}$$

Теперь можно проверить полученный результат командой int() и даже построить приближение центральными прямоугольниками искомого интеграла:

```
> with(student):
> int(f(x),x=0..1);
```

$$\frac{1}{24}$$

```
> middlebox(f(x),x=0..1,20);
```



III.6 Связь с Matlab

Пакет Matlab позволяет непосредственно из сеанса Maple обращаться к ограниченному множеству функций популярного среди инженеров пакета численных вычислений Maple, при условии, что он установлен на компьютере пользователя. При подключении команд пакета, если он не установлен, отображается соответствующее предупреждение:

```
> with(Matlab);

Error, (in execSystemInit) system level initialisation for package
'Matlab' failed
```

При успешном подключении пакета в области вывода печатаются, как обычно, все доступные команды пакета:

```
> with(Matlab);
            chol,closelink,defined,det,dimensions,eig,evalM,fft,getvar,
            inv,lu,ode45,openlink,qr,setup,setvar,size,square,transpose
```

Чтобы установить связь между двумя программами (Maple и Matlab), следует прежде всего выполнить команду openlink() без каких-либо параметров. После этого можно использовать все команды пакета для выполнения необходимых действий. Завершается сеанс связи выполнением команды closelink().
Функции Matlab могут работать как с объектами Maple (массивы, матрицы и векторы на основе r-таблиц,вещественные с плавающей точкой и целые числа), так и с объектами Matlab.

III.7 Пакет статистики stats

Пакет статистики stats содержит огромное количество команд для обработки анализа и отображения статистических данных. Также он содержит большое количество статистических распределений.
Этот пакет является примером пакета, состоящим из подпакетов, в которых сгруппированы команды, относящиеся к определенным разделам статистики. Например, подпакет describe содержит все необходимые команды для анализа данных, команды подпакета random позволяют получит любое известное статистическое распределение в виде списка данных и т.д. Всего пакет stats содержит семь подпакетов и одну функцию importdata(), позволяющую импортировать данные из внешнего файла. Можно подключить все команды пакета с помощью
```
>  with(stats);
```
или команды отдельных пакетов
```
>  with(stats, имя_подпакета);
```
Команды подпакета вызываются с использованием полных имен:
```
>  имя_подпакета[имя_команды](параметры);
```
Для использование коротких имен команд подпакета следует после подключения всего пакета или отдельного его подпакета выполнить команду:
```
>  with(имя_подпакета);
```
Команды пакета stats работают с данными, расположенными в статистических списках, которые включают в себя и обычные списки Maple. Специальные статистические списки могут включать в себя диапазоны и веса (количество повторений в списке заданной величины):

```
>  restart:with(stats);
```

$$[anova,\ describe,\ fit,\ importdata,\ random,\ statevalf,\ statplots,\ transform]$$

```
>  statlist:=[Weight(0.7,3),Weight(1.07,4),0.945,Weight(0.02..0.03,5),0.
>  896,1.01,1.04];
```

statlist :=
[Weight(0.7, 3), Weight(1.07, 4), 0.945, Weight(0.02..0.03, 5), 0.896, 1.01, 1.04]

Выражение Weight(x,n) указывает, что величина x появляется в списке n раз. Если конкретные значения из какого-нибудь диапазона не являются значимыми и их можно не различать, то для таких случаев предусмотрено задание диапазона. После создания статистического списка можно вычислить его характеристики командами подпакета describe:

```
> describe[mean](statlist); # Статистическое среднее
```

$$0.6497500000$$

```
> describe[standarddeviation](statlist); # Стандартное отклонение
```

$$0.4398483402$$

Получить список значений из нормального распределения можно командой normald подпакета random:

```
> normal_data:=[random[normald](30)];
```

$$normal\_data := [1.175839568, -0.5633641309, 0.2353939952, -1.442550291, -1.079196234, -0.02201464613, -2.585278364, -0.4432712806, -1.003281481, -0.02786973908, 1.526244859, -0.6051206219, 0.1640412457, 0.6530247357, -0.5410542893, 2.135025838, 0.1844238837, -0.6166294309, -0.4486976019, 0.8238240523, 0.2521330308, 0.1918301186, 0.8279838784, -1.742267132, 1.123077087, -0.1605619318, -1.555929034, -0.7807191640, -0.5186676113, -0.2582649678]$$

Теперь можно подсчитать, сколько значений из полученного списка попадают в определенные интервалы и построить гистограмму для этих данных, чтобы визуально оценить распределение, которому они принадлежат:

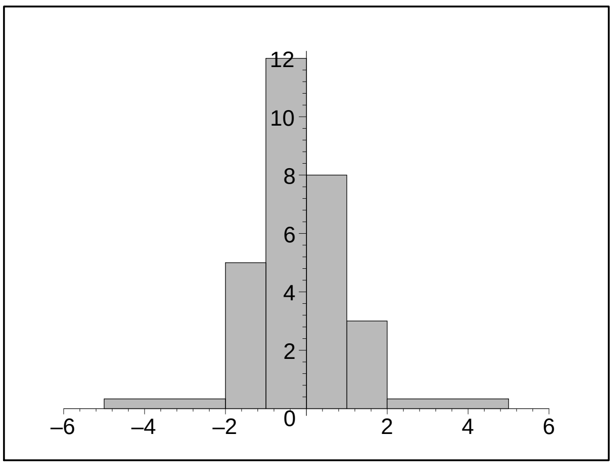
```
> ranges:=[-5..-2,-2..-1,-1..0,0..1,1..2,2..5];
```

$$ranges := [-5..-2,\ -2..-1,\ -1..0,\ 0..1,\ 1..2,\ 2..5]$$

```
> data_list:=transform[tallyinto](normal_data,ranges);
```

$$data\_list := [\mathrm{Weight}(0..1,\ 8),\ \mathrm{Weight}(1..2,\ 3),\ 2..5,\ -5..-2,\ \mathrm{Weight}(-2..-1,\ 5),\ \mathrm{Weight}(-1..0,\ 12)]$$

```
> statplots[histogram](data_list);
```



Глава IV

Графика

Системы аналитических вычислений привлекают исследователей не только своими возможностями реализации алгоритмов построения аналитических решений, но и развитой графикой, начиная от построения простейших двумерных кривых и заканчивая сложными трехмерными поверхностями и анимацией двумерных и трехмерных изображений. В любой момент пользователь может отобразить результаты своих вычислений в виде графических образов, которые, как известно, более информативны, чем скупые ряды цифр. Универсальные графические команды собраны в пакете plots, а в подпакете statplots пакета stats находятся специальные команды отображения статистических данных. Команды построения графиков численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений DEplot() и уравнений в частных производных PDEplot() можно найти, соответственно, в пакетах DEtools и PDEtools. Пакет student содержит несколько иллюстративных команд представления определенных интегралов в виде различных сумм, а также команду отображения касательной к функции в заданной точке. Чтобы воспользоваться перечисленными графическими средствами, обязательно подключение соответствующих пакетов. Но в Maple есть всегда две доступные графические команды plot() и plot3d(), которые расположены в основной библиотеке. Первая предназначена для построения графиков функций одной переменной (двумерная графика); с помощью второй можно строить трехмерные графические отображения поверхностей и пространственных кривых (пространственная графика). Команды в указанных выше пакетах также можно подразделить на команды двумерной и пространственной графики.

IV.1 Команды двумерной графики

Команда plot

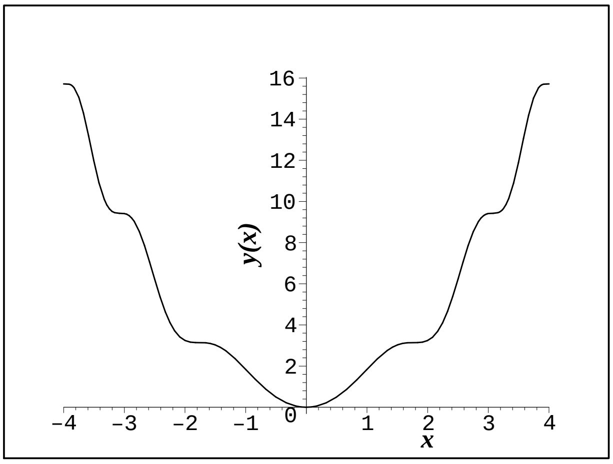
Многофункциональная двумерная графическая команда plot() расположена в системной библиотеке Maple, и поэтому доступна в любое время. С помощью этой команды можно построить график одной или нескольких функций одной вещественной переменной, заданных в явном или параметрическом виде, а также отобразить множество точек в декартовой или полярной системе координат. Синтаксис команды plot() следующий:
`plot(f, h, v, опции);`
Здесь `f` - функция, график которой необходимо отобразить, `h` и `v` представляют, соответственно диапазон изменения независимой переменной по горизонтальной оси графика и диапазон изменения значения функции вдоль вертикальной оси графика.

Диапазон изменения независимой переменной `h` задается в виде `x=a..b`, где `a` и `b` наименьшее и наибольшее значение изменения переменной, а `x` - имя независимой переменной. Если диапазон не задан, т.е. второй параметр представляет собой просто имя независимой переменной в функции, то по умолчанию принимается следующий интервал ее изменения $-10..10$. Этот параметр (с диапазоном или нет) обязательно должен присутствовать при задании графика командой plot().
Вертикальный диапазон `v`, задаваемый третьим параметром, ограничивает вывод графика определенной областью изменения функции. Он необязателен, как и опции, задающиеся в виде уравнений `имя_опции=значение`. При отсутствии явного задания опций принимаются их значения по умолчанию. Опции определяют вид отображаемого графика: толщину, цвет и тип линии графика, тип осей координат, размещение надписей и т.д. и задаются в форме уравнений `имя_опции=значение`. Набор возможных опций во всех командах двумерного графического вывода, за некоторым исключением,одинаков. Работа с командой plot() не представляет никаких сложностей. Несколько примеров позволят легко с ней освоиться. Первым нашим примером будет отображение графика функции $y(x) = x^2 + \sin(x^2)$ на интервале [-4,4] изменения независимой переменной x с созданием надписи.

Пример ПIV.1. *График функции с надписью*

```
> plot(x^2+sin(x^2),x=-4..4, color=black,
> titlefont=[HELVETICA,12],title="Пример
> вывода\nграфика",xtickmarks=8,thickness=3,
> axesfont=[COURIER,10],labelfont=[TIMES,BOLDITALIC,12],
> labels=["x","y(x)"],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL]);
```

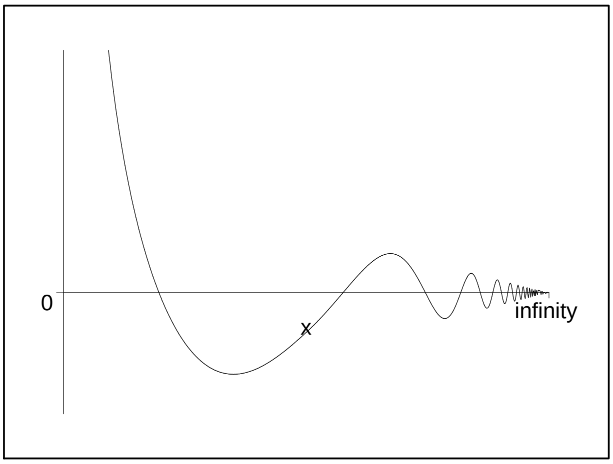
Пример вывода
графика



Обратите внимание, что для создания многострочной надписи в строке значения опции title использован символ перехода на новую строку (`\n`). Также на графике примера (ПIV.1) мы изменили шрифт надписей вдоль осей, задали их названия и отобразили вертикально название оси y.

Команда plot() может отображать графики функций не только на конечном интервале изменения независимой переменной, но и на бесконечном:

```
>  plot(cos(x)/x,x=0..infinity,-0.5..1,color=black,numpoints=800);
```



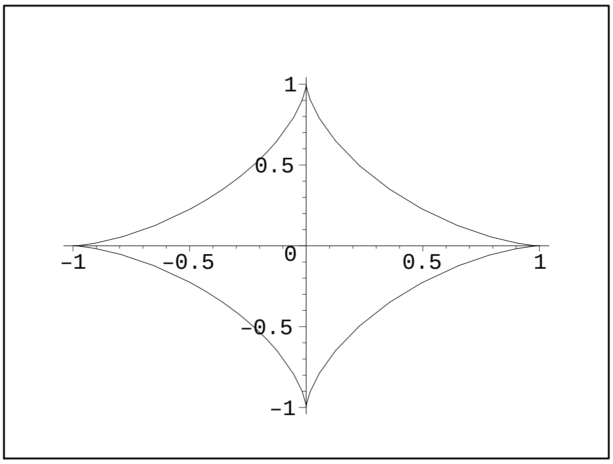
Здесь нам пришлось ограничить область значений функций диапазоном [-0.5,1],так как при x стремящемся к нулю, функция стремится к бесконечности, а также задать больше точек на графике функции, иначе в районе надписи infinity не наблюдалась бы гладкость функции, а были бы явные изломы, которые не соответствуют поведению функции.

Не всякую функцию можно представить в явном виде. Многие функции задаются в параметрической форме. Отображение графиков таких функций ничем не отличается от вывода явно задаваемых функций. Единственное отличие заключается в том, что параметрическая кривая задается в виде списка, где первый и второй элементы являются выражениями через параметр, соответственно, горизонтальной и вертикальной координат, а третий элемент задает изменение параметра в виде диапазона Maple. Пример (ПIV.2) демонстрирует отображение параметрически заданной кривой.

Пример ПIV.2. *Отображение графика параметрически заданной функции*

```
>  plot([cos(t)^3,sin(t)^3,t=0..2*Pi],
>  color=[black],  titlefont=[TIMES,ROMAN,12], title="Отображение
>  параметрической \n кривой",   xtickmarks=4, thickness=2,
>  axesfont=[COURIER,10]);
```

Отображение параметрической
кривой

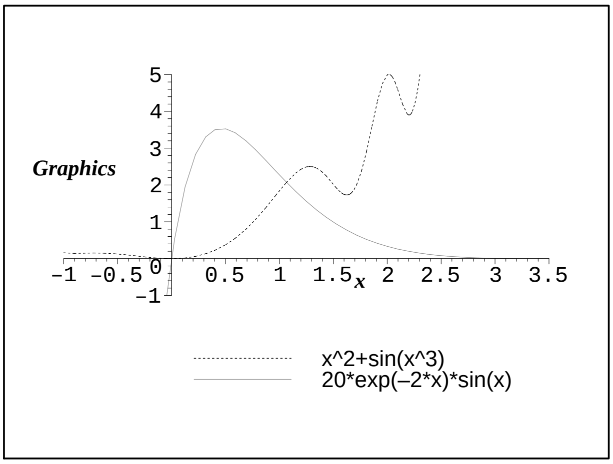


Для вывода нескольких функций на одном графике необходимо в команде plot() задавать функции в виде множества или списка, а значение опции color в виде списка позволяет задать цвет для вывода графиков функций. Если опция color не задана, то Maple отображает функции в соответствии со списком цветов по умолчанию.

Пример ПIV.3. *Отображение графиков нескольких функций*

```
> restart:

> plot([x^2+sin(x^3), 20*exp(-2*x)*sin(x)],

> x=-1..3.5, -1..5,

> color=[black,green],

> titlefont=[HELVETICA,12],title="Вывод графиков нескольких функц
> ий",

> legend=["x^2+sin(x^3)","20*exp(-2*x)*sin(x)"],

> xtickmarks=8,

> thickness=2,

> linestyle=[4,1],

> axesfont=[COURIER,10],

> labels=["x","Graphics"],

> labelfont=[TIMES,BOLDITALIC,10]);
```

Вывод графиков нескольких функций

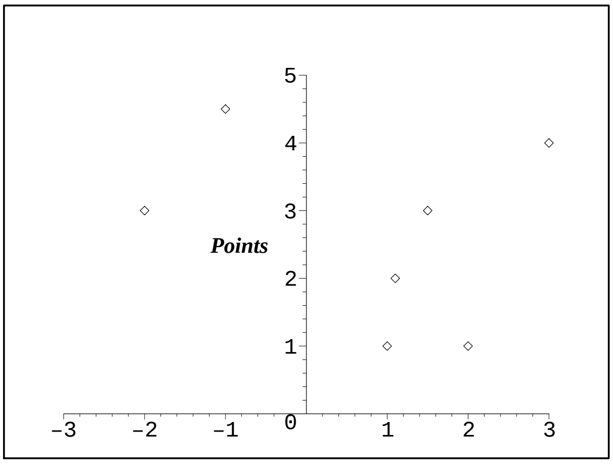


Команда plot() позволяет отображать на графике отдельные точки, которые задаются в виде списка списков , т.е. списка, элементами которого являются списки. Эти двухэлементные списки определяют координаты точек на плоскости. Для вывода точек необходимо задать значение опции style, равной POINT. Если этого не сделать, то Maple отобразит ломаную линию, соединяющие точки в последовательности их задания, не выделяя их специальными символами. В примере (ПIV.4) точки, заданные своими координатами на плоскости, отображаются с использованием символа symbol=DIAMOND.

Пример ПIV.4. *Отображение точек на плоскости*

```
> plot([[1,1],[2,1],[3,4],[-2,3],[-1,4.5],[1.5,3],[1.1,2]],x=-3..3,
> 0..5,color=black,style=POINT,symbol=DIAMOND,
> symbolsize=16,titlefont=[HELVETICA,11],title="Вывод точек командой
> plot",xtickmarks=4,axesfont=[COURIER,10]
> ,labels=["","Points"],labelfont=[TIMES,BOLDITALIC,10]);
```

Вывод точек командой plot



IV.2 Пространственная графика

Команда plot3d

Функцию двух переменных можно отобразить как поверхность в трехмерном пространстве, две оси которого соответствуют значениям двух независимых переменных, а по третьей оси откладываются значения функции. В Maple подобную процедуру визуализации функции двух переменных выполняет команда plot3d(), которая, как и команда отображения графика функции одной переменной plot(), расположена в стандартной библиотеке, а поэтому доступна пользователю в любой момент. Эта команда позволяет отображать графики функций, заданных как в явном виде, так и в параметрическом виде.
Синтаксис команды plot3d() практически полностью соответствует синтаксису команды plot() с небольшим очевидным дополнением, связанным с наличием второй независимой переменной:
`plot3d(expr,x=a..b,y=c..d, опции)`
Здесь параметр expr представляет алгебраическое выражение или обращение к пользовательской функции двух переменных с диапазонами изменения, определяемыми вторым и третьим параметром, в которых вместо x и y следует задавать имена переменных. Пользовательскую функцию можно определять непосредственно в команде, но в этом случае задавать имена переменных не надо:

```
>  plot3d((x,t)->cos(x)*sin(t),-1..1,-1..1);
```

Отметим, что и выражение, и функция, представляющие параметр expr, не должны содержать неопределенных символьных переменных, кроме двух упомянутых независимых переменных. Границы диапазонов представляются числами, хотя для второй независимой переменной они могут быть выражениями, зависящими от первой переменной. В этом случае график функции двух переменных отображается не на прямоугольной области, а на четырехугольной, у которой две противоположные границы являются криволинейными. Например, следующая команда

```
>  plot3d(cos(x)*sin(t),x=-1..1,t=-5..x^2);
```

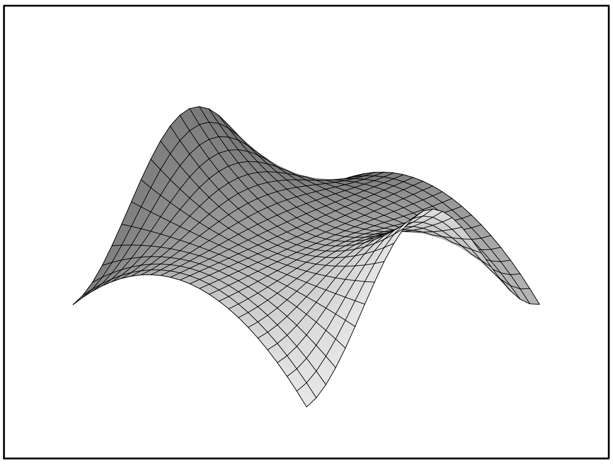
отображает график функции на области, у которой одна из границ представлена параболой.
Опции для команд трехмерной графики определяются так же, как и для команд графического отображения на плоскости, в виде уравнения, в левой части которого стоит имя опции, а в правой ее значение. Многие опции команд пространственной графики полностью соответствуют своим двумерным аналогом, правда в некоторых опциях добавлена дополнительная функциональность (смотри, например, опцию color), но есть и специальные опции, отражающие специфику пространственной графики.
Как видно из описаний команды plots() и ее опций, работа с ней ясна и проста. Например, для отображения графика функции $z = cos(x)y^2$ с заголовком и значениями опций по умолчанию следует выполнить команду:

```
>  f:=cos(x)*y^2;
```

$$f := \cos(x)\, y^2$$

```
>  plot3d(f(x,y),x=-3..3,y=-3..3);
```

График функции
$z = cos(x)y^2$



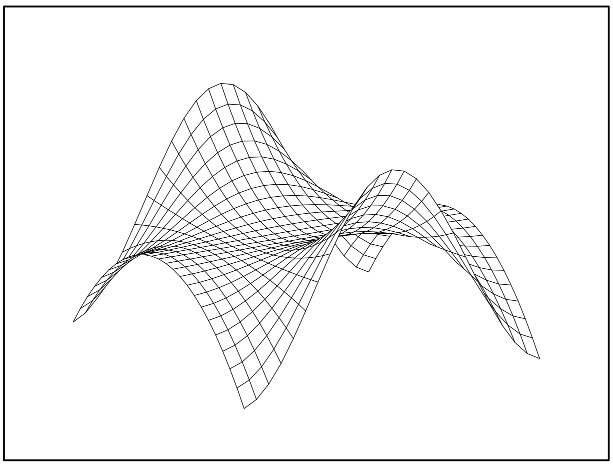
По умолчанию поверхность закрашивается в соответствии с цветовой схемой XYZ, которая выбирает цвет точки поверхности в зависимости от значений трех ее координат.
Можно отобразить ту же поверхность в виде каркасной модели с удаленными невидимыми линиями и явно заданным направлением взгляда на нее:

```
>  f:=cos(x)*y^2;
```

$$f := \cos(x)\, y^2$$

```
>  plot3d(f(x,y),x=-3..3,y=-3..3,
>  style=hidden,color=black,orientation=[60,65],title="График функции
>  \nz=cos(x)*y^2");
```

График функции
$z = cos(x)y^2$

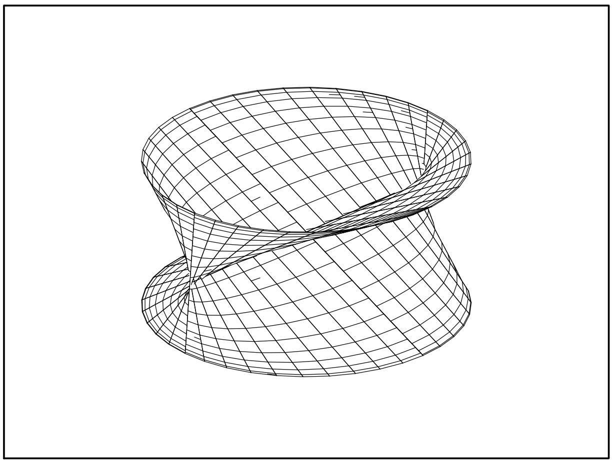


Командой plot3d() можно отображать параметрически заданные поверхности. Только надо помнить, что для параметризации трехмерной поверхности следует использовать два параметра, т.е. задать три координаты точек поверхности как функции или выражения двух переменных. Синтаксис команды plot3d()в этом случае будет иметь следующий вид:
`plot3d([x-expr,y-expr,z-expr]диапазон-парам1,диапазон-парам2,опции)`

Пример ПIV.5 иллюстрирует отображение параметрически заданной поверхности в декартовой системе координат.

Пример ПIV.5.

```
> plot3d([sin(x),cos(x)*sin(y),sin(y)],
> x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,style=hidden,color=black,grid=[40,40]);
```



Для улучшения вида отображаемой поверхности мы явно задали сетку точек, на которой вычисляются, значения параметрически заданной функции поверхности.

IV.3 Команды пакета plots

Двумерные команды пакета plots

На плоскости кроме прямоугольной декартовой системы координат используются и другие. Одной из наиболее часто применяемой является полярная система координат, в которой положение точки задается также двумя величинами. Они представляют собой длину r радиуса-вектора, проведенного из начала координат в заданную точку, и угол наклона φ этого вектора относительно положительного направления горизонтальной оси координат. Многие "замечательные" плоские кривые легче и проще задавать именно в полярной системе координат. Например, окружность радиуса a с центром в начале координат в полярной системе координат задается простым уравнением $r = a$, тогда как в декартовой системе координат эта же окружность задается уравнением в неявном виде $\sqrt{x^2 + y^2} = a^2$.

Для отображения графика функции, заданной в полярной системе координат, в пакете plots существует функция polarplot(). Ее синтаксис похож на синтаксис команды plot() за одним исключением - не задается третий параметр, ограничивающий диапазон изменения значений, в данном случае длины радиуса-вектора:

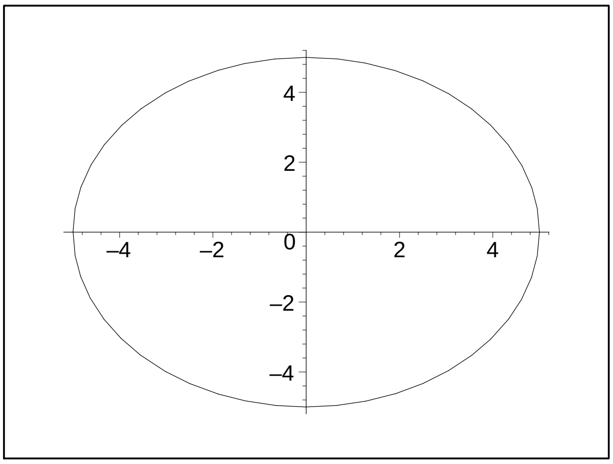
`polarplot(r, phi=диапазон, опции);`

Параметр r - это выражение или функция, зависящие от независимой переменной phi, интерпретируемой как угол поворота радиуса-вектора относительно горизонтальной оси. Диапазон изменения независимой переменной может отсутствовать, тогда используется диапазон изменения по умолчанию `-Pi..Pi`. Остальные параметры представляют собой такие же опции, что и в функции plot().

Использование команды построения окружности в полярной системе координат демонстрируется в примере ПIV.6.

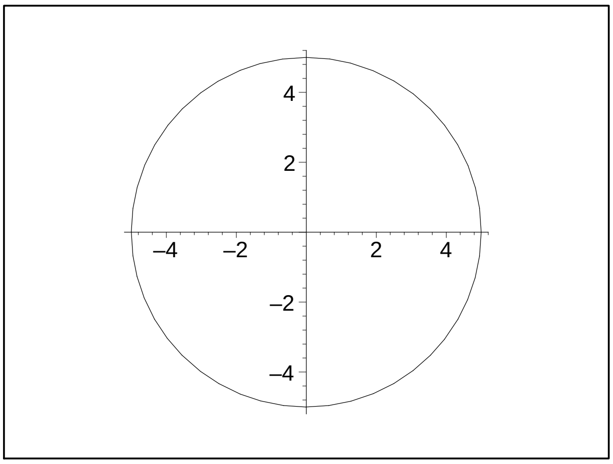
Пример ПIV.6. *График функции в полярной системе координат*

```
> with(plots):

> polarplot(5,phi=0..2*Pi,color=black,thickness=2);
```



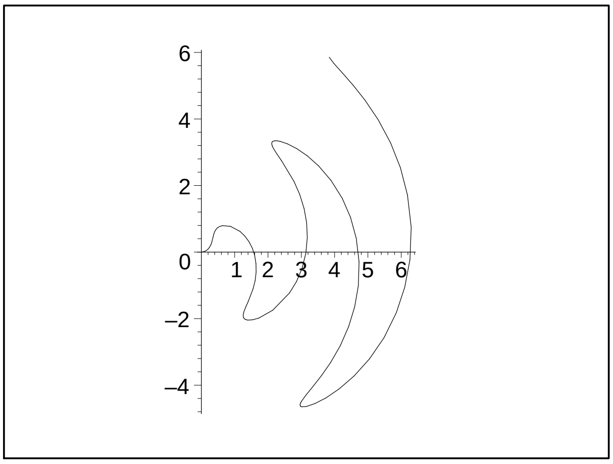
Если посмотреть на вывод этой команды, то вместо обещанной окружности мы видим эллипс. Дело в том, что по умолчанию во всех графических командах используется значение UNCOSTRAINED параметра scaling. А это означает, что график растягивается по осям таким образом, чтобы полностью заполнить отводимое под него пространство на рабочем листе, что приводит к несоответствию единиц измерения по горизонтальной и вертикальной осям. Подобное явление характерно для вывода *всех* графических команд Maple. Исправить подобный дефект можно с помощью команд интерфейса пользователя или при отображении кривой в соответствующей команде, задав опцию scaling=CONSTRAINED:

```
> with(plots):

> polarplot(5,phi=0..2*Pi,color=black,thickness=2,scaling=constrained);
```



Команда polarplot() также позволяет отображать графики параметрически заданных кривых. Для этого подобную кривую следует задать в форме трехэлементного списка, в котором первые два элемента представляют выражение через параметр длины радиуса-вектора и его угла поворота, а третий элемент задает диапазон изменения параметра:

```
> with(plots):

> polarplot([r,sin(2*r),r=0..7], color=black, thickness=2,
> scaling=constrained);
```



В Maple командой coordplot() можно начертить “линии уровня” плоских систем координат, поддерживаемых командой plot() через опцию coords. В качестве параметра этой функции передается название системы координат:

```
> with(plots):

> coordplot(polar,color=[black,navy],scaling=CONSTRAINED,
> thickness=2,title=‘Полярная система координат‘);
```

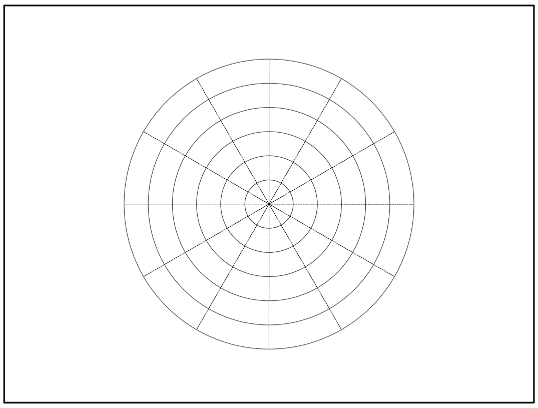


Рис.IV.3. *Полярная система координат*

```
> with(plots):
> coordplot(bipolar,color=[black,navy],scaling=CONSTRAINED,
> numpoints=1000,thickness=2,title="Биполярная система координат");
```

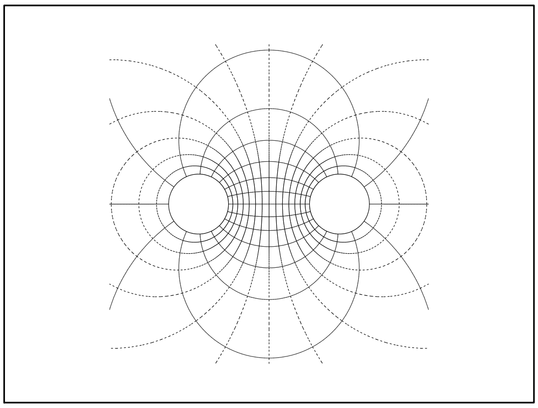


Рис.IV.4. *Биполярная система координат*

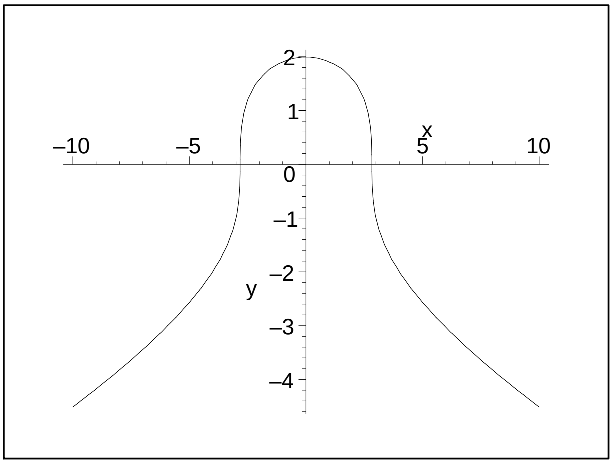
Бывает так, что исходная функция, график которой надо отобразить, представляется только в неявном виде $f(x, y) = 0$ и невозможно ее представить в явной форме ни в одной из известных систем координат. В таком случае следует воспользоваться командой implicitplot(), которая специально разработана для отображения неявных функций:
`imlicitplot(expr, x=a..b, y=c..d, опции);`
`imlicitplot(f, a..b, c..d, опции);`
Здесь в первой форме вызова команды параметр expr представляет уравнение, зависящее от двух переменных x и y, а во второй форме f представляет уравнение, в левую и правую части которого входят только процедуры-функции и операторы от двух переменных. Дополнительно ко всем известным опциям команды plot() можно задать опцию `grid=[m,n]`, определяющее сетку из $m \times n$ точек, на которой вычерчивается кривая.

При увеличении количества точек в сетке кривая отображается более гладкой без

угловых точек. По умолчанию используется сетка 25×25 точек. Опцией coords можно задавать график в разных системах координат, по умолчанию используется декартовая прямоугольная система координат.

Пример ПIV.7. *График неявной заданной функции*

```
> with(plots):
> implicitplot(x^2+y^3-8=0,x=-10..10,y=-8..8,color=black,grid=[60,60],t
> hickness=2);
```



Трехмерные команды пакета plots

В пространстве кроме декартовой системы координат используются и другие. Наиболее часто применяются цилиндрическая и сферическая системы координат. В пакете plots предусмотрены специальные команды, отображающие графики функций двух независимых переменных в этих системах координат: cylinderplot() и sphereplot().
В цилиндрической системе координат положение точки задается углом поворота θ проекции ее радиус-вектора на плоскость xy относительного положительного направления оси x, длиной r этой проекции и значением координаты z точки. Команда cylinderplot() отображает поверхность. заданную либо в виде явной функции, выражающей зависимость координаты r от двух других θ и z, либо в параметрическом виде, при котором каждая из координат определяется как функция двух параметров. В этом случае явного задания функции команда имеет следующий синтаксис:
`cylinderplot(r-выражение, theta=диапазон, z=диапазон)`
Здесь первый аргумент `x-выражение` является выражением от двух переменных `theta` и z и представляет явный вид задания функции. Для параметрической функции используется другая ее форма, в котором первый аргумент является трехэлементным списком, представляющим зависимость трех координат поверхности в цилиндрической системе координат через два параметра, а следующие два аргумента определяют диапазон изменения параметров поверхности:

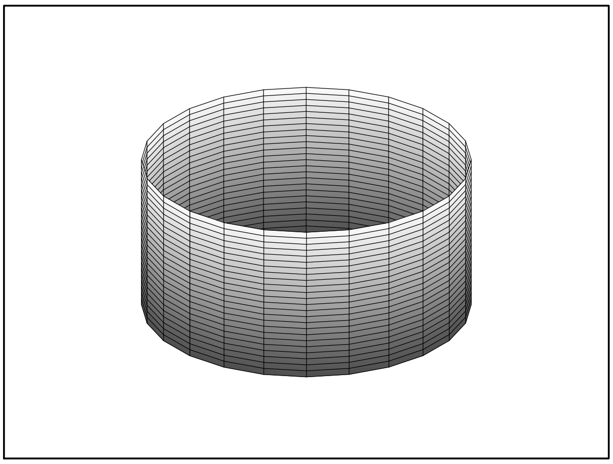
```
cylinderplot([r-выражение,theta-выражение,z-выражение],param1=диапазон,
param2=диапазон)
```

Как и во всех графических командах, кроме указанных аргументов можно использовать любые опции трехмерной графики. Пример ПIV.8 демонстрирует построение поверхности в цилиндрической системе координат.

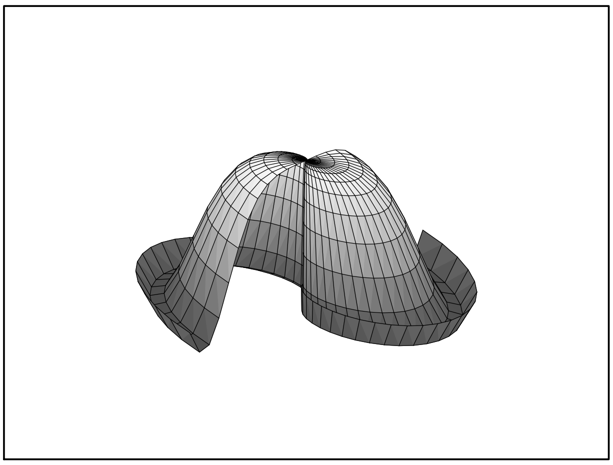
Пример ПIV.8. *Построение поверхности в в цилиндрической системе координат*

```
> with(plots):
```

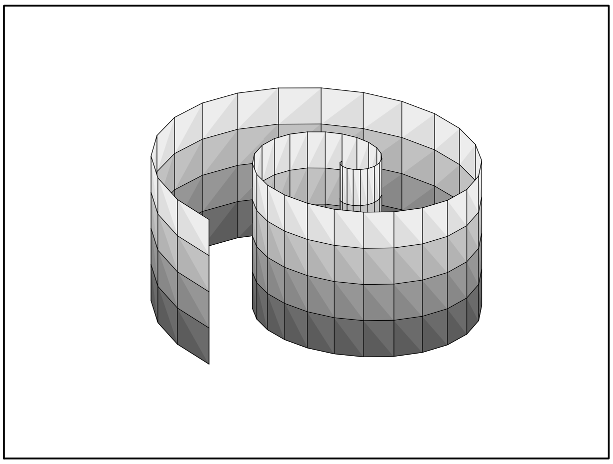
```
> # Круговой цилиндр радиуса 1 и высотой 2.
> cylinderplot(1,theta=0..2*Pi,z=-1..1,shading=ZGRAYSCALE);
```



```
> # Параметрически заданная поверхность
> cylinderplot([s*t,t,cos(s^2)],t=0..Pi,s=-2..2,
> shading=ZGRAYSCALE);
```



```
> # Спиральный цилиндр высотой 2
> cylinderplot(t,t=0..4*Pi,s=-1..1, shading=ZGRAYSCALE,grid=[50,5]);
```



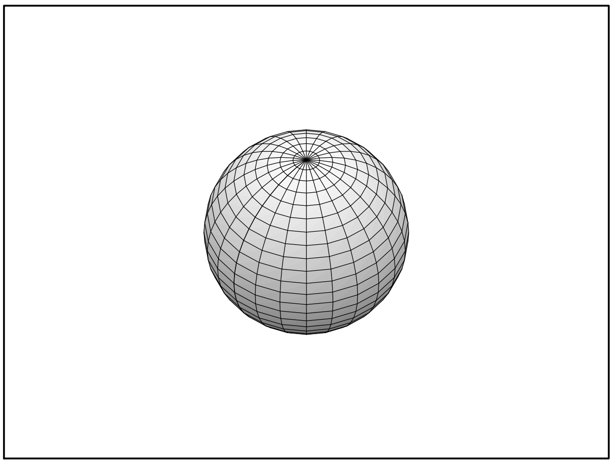
Обращаем внимание читателя, что для гладкого отображения спирального цилиндра пришлось установить сетку с пятьюдесятью точками по угловой координате θ и пятью точками по линейной координате z.
В сферической системе координат положение точки определяется двумя углами и одним линейным размером. Первый угол θ, как и в цилиндрической системе координат, задает угол поворота проекции радиус-вектора точки на плоскость xy. Второй угол - это угол ϕ, который образует радиус-вектор точки с положительным направлением оси z декартовой системы координат. Линейная координата r представляет длину радиус-вектора точки. При работе с командой sphereplot(), как и в случае с командой построения поверхностей, заданных в цилиндрической системе координат, возможно либо явное задание поверхности, либо параметрическое. В первом случае необходимо в качестве первого аргумента передать выражение длины радиус-вектора через угловые координаты и задать их диапазоны изменения, во втором случае следует задать список сферических координат точек поверхности в форме выражений от двух параметров:

```
sphereplot(r-выражение, theta=диапазон, phi=диапазон)
sphereplot([r- выражение, theta-выражение, phi-выражение],
param1=диапазон, param2=диапазон)
```

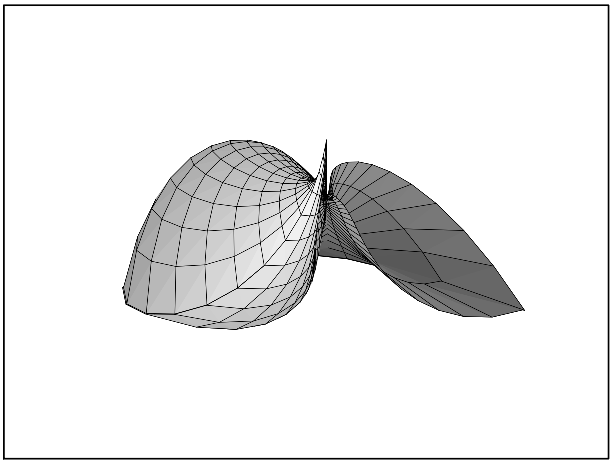
Команды примера ПIV.9 иллюстрируют построение поверхностей в сферической системе координат.

Пример ПIV.9. *Построение поверхности в сферической системе координат*

```
>  with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined

>  # Единичная сфера с центром в начале координат.

>  sphereplot(1,theta=0..2*Pi,phi=0..Pi,shading=ZGRAYSCALE,scaling=CONST
>  RAINED);
```



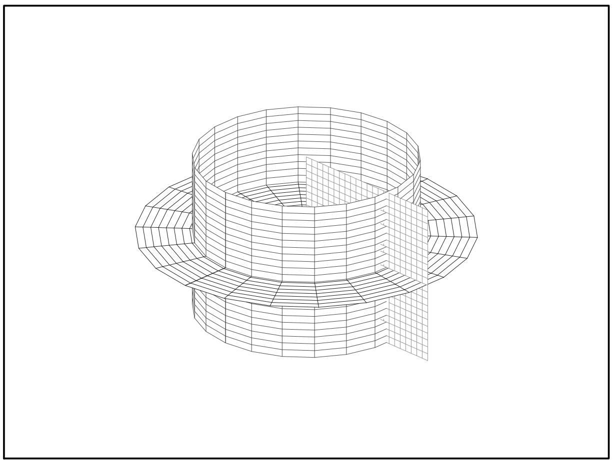
```
> # Параметрическая поверхность
> sphereplot([exp(s)+t,cos(s+t),t^2],s=0..2*Pi,t=-2..2,shading=ZGRAYSCA
> LE,orientation=[80,30],grid=[40,40]);
```



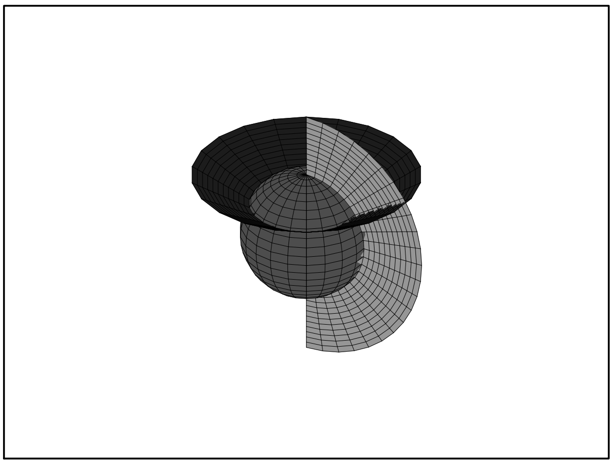
Как отмечалось при описании опций пространственных команд, Maple позволяет строить поверхности, заданные и в других пространственных системах координат. Единственное, что следует знать и хорошо представлять, - это каким образом определяется в них положение точки. Команда coordplot3d() визуалирует координатные поверхности всех возможных систем координат, используемых в Maple. В примере ПIV.10 отображены некоторые из них.

Пример ПIV.10. *Координатные поверхности пространственных систем координат*

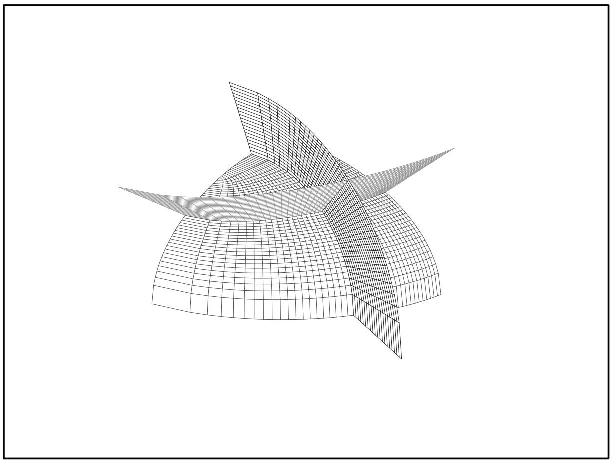
```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> # Цилиндрическая система координат.
> coordplot3d(cylindrical);
```



```
> # Сферическая система координат.
> coordplot3d(spherical,style=PATCH,orientation=[0,60],scaling=CONSTRAI
> NED);
```



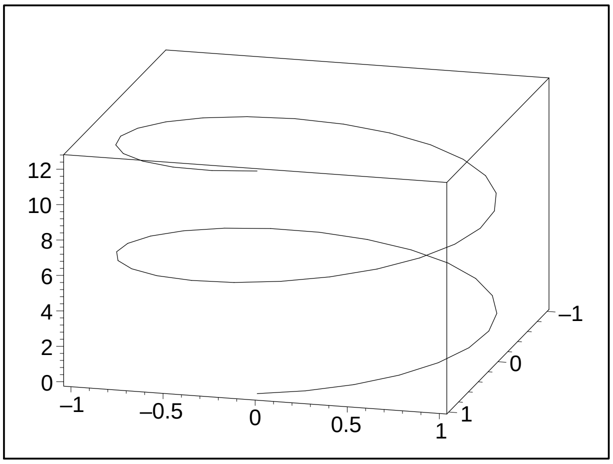
```
> # Эллиптическая система координат.
> coordplot3d(ellipsoidal,grid=[40,40],orientation=[40,60]);
```



Кривую в пространстве можно задать набором ее точек или как пересечение двух поверхностей. Команда spacecurve() позволяет отобразить пространственную кривую, задаваемую только набором ее точек, причем координаты точек задаются как функции одного параметра (пример ПIV.11).

Пример ПIV.11. *Отображение пространственной кривой*

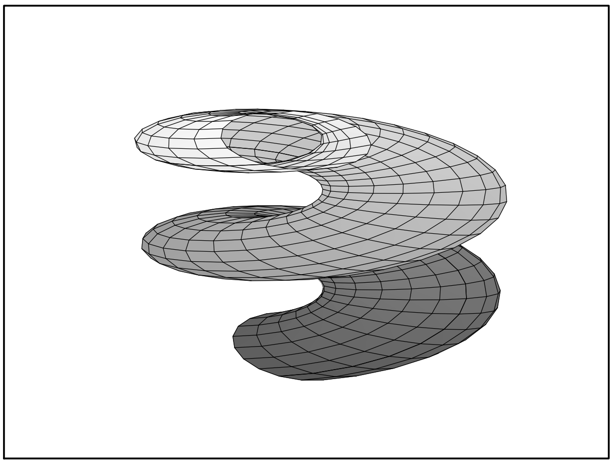
```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> spacecurve([cos(t),sin(t),t],t=0..4*Pi,color=black,thickness=2,
> axes=BOXED,orientation=[15,65]);
```



Можно построить круговую цилиндрическую поверхность заданного радиуса вдоль пространственной кривой командой tubeplot(). В примере ПIV.12 построена такая поверхность вдоль кривой предыдущего примера.

Пример ПIV.12. *Круговой цилиндр вдоль пространственной кривой*

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> tubeplot([cos(t),sin(t),t],t=0..4*Pi,radius=1,tubepoints=20,projectio
> n=0.8,orientation=[15,65],shading=ZGREYSCALE);
```



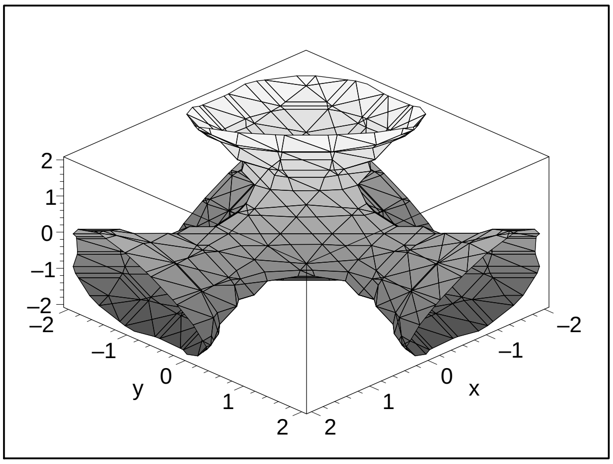
Опция radius определяет радиус криволинейного кругового цилиндра, опция tubepoints задает количество точек, используемых для построения кругового сечения цилиндра. Для построения неявно заданных поверхностей следует использовать команду impliciplot3d(), в которой задается уравнение поверхности и диапазоны изменения всех трех ее переменных. Опцией coords можно определять построение неявно заданных поверхностей в разных системах координат.

Пример ПIV.13. *Отображение неявно заданных поверхностей*

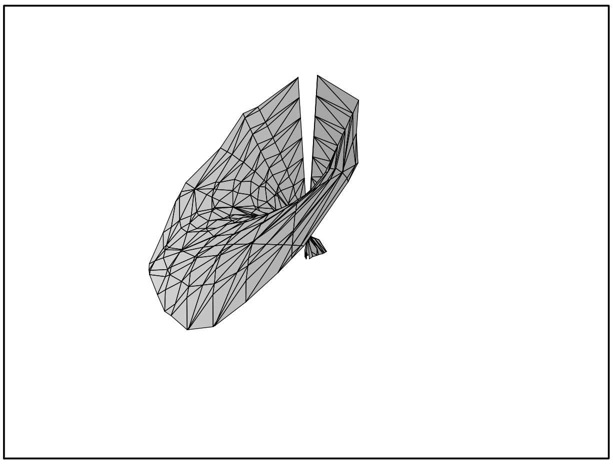
```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> # Декартова система координат
> implicitplot3d(x^3+y^3+z^3+1=
> (x+y+z+1)^3,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,shading=ZGRAYSCALE,axes=BOXED
> );
```




```
> # Сферическая система координат
> implicitplot3d(r^2=(1.3)^x*sin(y),x=-1..2*Pi,y=0..Pi,r=0.1..5,coords=
> spherical,orientation=[145,95]);
```



Для создания методов в трехмерном пространстве предназначена команда textplot3d(), синтаксис которой полностью соответствует аналогичной команде для отображения текстовых строк на плоскости с единственным исключением, связанным с заданием текстовых точек: их координаты представляются тремя числовыми значениями. Допустимая опция align выравнивания текста относительно точки имеет те же самые значения с тем же самым смыслом, что и двумерный аналог этой команды.

Глава V

Пакет *LaTeX* 2e

V.1 Структура документа *LaTeX*

LaTeX можно использовать в разных целях, например, для написания статьи или письма или для получения демонстрационных файлов. Ясно, что для разных документов требуются различные логические структуры, т.е. разные команды и окружения. Говорится,что документ принадлежит к *классу* документов с одинаковой структурой.

```
\documentclass[a4paper,12pt]{article}
\usepackage[russian]{babel}
\usepackage{bar,curves,epic,eepic}
\usepackage{biblio,bibdoc}
\usepackage{amsmath,amssymb}
\usepackage{maple2e}
\usepackage{boxedminipage,shadow,fancybox}
\usepackage{epsfig,psfig}
\usepackage[cp1251,koi8-r]{inputenc}
\inputencoding{cp1251}
\begin{document}
```

Рис.V.5. *Пример преамбулы документа*

Класс этого документа - article. Макет соответствует опции a4paper. Первая декларация `\usepackage` говорит *LaTeX* 'у, что этот документ содержит команды и структуры, обеспечиваемые пакетом multicol (поддержка французского языка).

Класс к которому относится наш документ задается с помощью запуска *LaTeX* 'овского файла командой `\documentclass`, где обязательный параметр дает название *класса документа.* Класс документа определяет возможные логические команды и окружения (например, `\chapter` в классе report) так же, как и форматирование по умолчанию для этих элементов. Факультативный аргумент позволяет модифицировать форматирование этих элементов, снабжая списком *опций класса.* Например, опция 11pt распознается большинством классов документов и дает указание *LaTeX* 'у выбрать шрифт величиной 11 пунктов в качестве основного.

Многие команды *LaTeX* 'а не являются специфическими для одного класса, а могут использоваться в нескольких классах. Собрание этих команд называется пакетом, а пользователь информирует *LaTeX* об использовании определенных пакетов, размещая одну или несколько команд `\usepackage` после команды `\documentclass`.

Команда `\usepackage` имеет обязательный аргумент, являющийся названием пакета, и факультативный аргумент, который может содержать список *опций пакета*, модифицирующих работу пакета.

Классы документов и пакеты реализованы во внешних файлах с расширениями соответственно *.cls* и *.sty*[2]. Код для опций класса иногда сохраняется в файлах (в этом случае с расширением *.clo*), но обычно определяется непосредственно в файле класса или пакета. В случае с опциями, имя файла может отличаться от имени опции, например, опция 11pt может относиться к файлу art11.clo, если она используется в классе article, и к файлу bk11.clo внутри класса book.

Команды, заключенные между командами `\documentclass` и `\begin{document}`, - эта так называемая *преамбула документа.* Все параметры стиля должны быть определены в этих пределах, в пакете, классе или непосредственно в документе перед командой `\begin{document}`, которая устанавливает приоритеты для некоторых глобальных параметров. Как правило, нестандартный пакет *LaTeX* 'овских файлов содержит общие модификации или улучшения, по сравнению со стандартным *LaTeX* 'ом, в то время как команды в преамбуле определяют изменения текущего документа. Для изменения внешнего вида документа, есть несколько возможностей:

- изменить стандартный набор параметров в файле класса с помощью опций этого класса;

- добавить один или более пакетов в документ и использовать их;

- изменить стандартный набор параметров в файле пакета с помощью опций этого пакета;

- определить свои собственные пакеты, содержащие особый набор параметров, и загрузить их с помощью команды `\usepackage` после пакета или класса, которые должны быть модифицированы;

- сделать последние урегулирования внутри преамбулы.

Обработка опций и пакетов

Алгоритм, используемый в $LaTeX2_\varepsilon$ для обработки опций в командах `\documentclass` и `\usepackage`, является более мощным, чем механизм, управляющий опциями команды `documentstyle` в *LaTeX* 'е2.09. Существует четкое разграничение между опциями класса или пакета и файлами пакетов для общих целей. Последние должны быть определены с помощью команды `\usepackage`. Эти опции принадлежат новому документу (если они используются в команде `\documentclass`), либо отдельным пакетом (если они определены в команде `\usepackage`).

Можно определить опции в команде `\usepackage`, если эти опции декларированы пакетом. В противном случае будет сообщение об ошибке, информирующее о том, что данная опция неизвестна. Опции команды `\documentclass` обрабатываются по другому. Если определенная опция не декларирована классом, она будет принята за 'глобальную опцию'.

Все опции команды `\documentclass` (декларированные и глобальные) автоматически передаются в качестве опций класса всем декларациям команды `\usepackage`. Таким образом, если файл пакета, загружаемый с декларацией команды `\usepackage`, распознает (т.е. декларирует) некоторые из опций класса, он может производить присваивающие действия; в противном случае класс опций при обработке пакета будет проигнорирован. Поскольку все опции должны быть определены внутри файла класса или пакета, их действие контролируется классом или пакетом (можно установить внутренние средства для прочтения внешнего файла). По этой причине их порядок в факультативном аргументе команд `\documentclass` и `\usepackage` нерелевантен.

Если требуется использовать несколько пакетов с одинаковыми опциями (например, никакими), можно загрузить их все одной командой `\usepackage` путем определения имен пакета, отделяя их запятой в обязательном аргументе. Например,

```
\usepackage[german]{babel}
\usepackage[german]{varioref}
\usepackage{multicol}
\usepackage{epic}
```

можно записать в таком виде:

```
\usepackage[german]{babel,varioref}
\usepackage{multicol,epic}
```

Определив german как глобальную опцию, получаем сокращенный вариант:

```
\documentclass[german]{book}
\usepackage{babel,varioref,multicaol,epic}
```

после чего команда german будет передана во все определенные пакеты и, следовательно, будет обработана теми пакетами, которые ее декларировали. Когда мы доходим до команды `\begin{document}`, все глобальные опции проверены, т.е. они были использованы в каком-либо пакете, если нет , то будет предупреждающее сообщение. Причиной обычно является орфографическая ошибка в названии опции или удаление команды `\usepackage`, загружающей пакет, использующий эту опцию. Поэтому если необходимо ввести некоторые изменения в класс документов или пакет (например, изменить параметры или переопределить некоторые команды), надо поместить соответствующий код в отдельный файл с расширением .sty. Затем загрузить этот файл командой `\usepackage` после пакета, работу которого требуется модифицировать (или класса, если изменения касаются классов). Такой файл локального пакета должен содержать одну специальную декларацию в начале, указывающую дистрибутив или релиз $LaTeX2_{\xi}$, а именно:

```
\NeedsTeXFormat{formal}{release}
```

В качестве формата нужно указать *LaTeX2e*. Если определен факультативный аргумент release, он должен содержать дату обновления дистрибутива $LaTeX2_\varepsilon$ в последовательности год - месяц - число ($YYYY/MM/DD$). Например, команда
`NeedsTeXFormat{\Ltex2e}[1994/02/01]`
задает версию $LaTeX2_\varepsilon$, обновленную 1 февраля 1994г. ($LaTeX2_\varepsilon$ обновляется дважды в год в определенные числа). Цель этой команды - обеспечить защиту от устаревших версий $LaTeX2_\varepsilon$. Если, например, в пакете используется команда, которая в версии от 01.02.1994 имела недостатки, а затем была исправлена в версии от 01.08.1994, то факультативный аргумент `\NeedsTeXFormat` предупредит о том, что пакет используется в старой версии $LaTeX2_\varepsilon$. Более новая дата обновления принимается без предупреждения.

Другой способ модифицировать пакет заключается в установке соответствующего кода в преамбуле документа. Однако есть одно важное техническое различие между командами внутри файлов класса или пакета и командами в преамбуле: у $LaTeX'a$ есть много *внутренних* команд, которые нельзя использовать в своем документе без специальных мер предосторожности. Имена этих внутренних команд содержат знак `@`. Его нужно переименовать, так как знаки, не являющиеся буквами, обычно не присутствуют в имени *LaTeX*'овских команд. (За исключением двух десятков команд, чьи имена представляют собой символ бэклиш (`\`) и следующий за ним один небуквенный знак, все остальные команды состоят из символа \, сопровождающегося одной или несколькими буквами.) Теперь, когда команды в файле исполняются, *LaTeX* рассматривает знак `@` как букву. Это позволяет пакетным файлам беспрепятственно работать с этими внутренними командами, в то время как они не могут быть использованы в этом качестве в преамбуле документа.
Несмотря на это, можно работать с внутренними командами в преамбуле, ограничив область, где `@` будет считаться буквой внутри команд `makeatletter` и `makeatother`. В качестве примера рассмотрим команду, которая приказывает *LaTeX*'у установить новый счетчик, тогда как другой счетчик продолжает наращивать свои значения (внутренняя команда `@addtoreset`). Таким образом, при использовании класса article можно нумеровать уравнения внутри разделов с помощью кода, указанного ниже в преамбуле.

```
\documentclass{article}
...
\makeatletter  % ‘@" теперь обычная "буква" для TeX’a
\@addtoreset{equation}{section}
\makeatother % ‘@’ запоминается как "небуква" для TEX’a
\bigin{document}
.......
```

Как объяснялось ранее, внутри файла пакета знак `@` считается обычной буквой и может быть использован в имени команды. Поэтому никогда не следует использовать команды `\makeatletter` и `\makeatother` внутри пакетных файлов.

Разделение исходного файла на части

Исходные документы *LaTeX* 'а можно удобным образом разбить на несколько частей с помощью команды `\include`. Документы могут быть частично переформатированы путем определения аргументов команды `\includeonly` только для тех файлов *LaTeX* 'а которые нужно заново обработать. Для остальных файлов, указанных в `\include` нумеруемая информация (страница, глава, таблица, рисунок, уравнение и т.д.) будет считана из соответствующих файлов с расширением .aux, которые получаются после предыдущей обработки. Например, в случае, показанном на рисунке Рис.V.6, пользователь хочет заново обработать только файлы chap1.tex или appen1.tex. *LaTeX* выдает предупреждение типа «Нет файла xxx.tex», когда он не может найти файл, определенный в декларации `include`, но не выдает сообщение об ошибке и продолжает работу.

Если информация в файлах с расширением .aux отвечает новым требованиям, можно обработать только часть документа и получить все счетчики, перекрестные ссылки и страницы в правильном виде в переформатированной части.

```
\documentclass{book}          % класс документа ‘‘book’’
\includeonly{chap1,appen1}    % включить только chap1 и appen1
\begin{document}
\include{chap1}               % ввести chap1.tex
\include{chap2}               % ввести chap2.tex
\include{chap3}               % ввести chap3.tex
\include{appen1}              % ввести appen1.tex
\include{appen2}              % ввести appen2.tex
\end{document}
```

Рис.V.6. *Структуирование документа, подготовленного в LaTeX 'е*

Однако, если один из счетчиков (включая номера страниц для перекрестных ссылок) меняется в заново обработанной части, документ целиком должен быть перекомпилирован, чтобы получить правильные указатель, оглавление и библиографические ссылки.

Таким образом, в тех случаях, когда целесообразно разбить большой документ на мелкие части и работать с отдельными файлами с помощью текстового редактора, в промежуточной стадии работы над одной или более главами частичное переформатирование должно осуществляться с большой осторожностью. Когда же требуется последняя и правильная копия, единственный безопасный путь - это новая обработка целого документа. Если документ слишком большой, чтобы обработать его за один сеанс, его можно разбить на части и обработать частями. Однако в этом случае обработку следует производить в *правильной последовательности*, чтобы убедиться в правильности перекрестных ссылок и номеров страниц.

Комбинирование нескольких файлов

Посылая кому-нибудь документ в *LaTeX* 'е, может понадобиться послать локальные или нестандартные пакетные файлы (например, частные модификации некоторых пакетов) с исходным файлом. В таких случаях часто бывает полезно поместить всю информацию, требующуюся для обработки документа в один файл.

Для этого *LaTeX* предлагает окружение filecotents. Это окружение берет один аргумент, имя файла; его тело будет состоять из содержимого этого файла. Оно может появляться только перед декларацией `\documentclass`.

Если *LaTeX* столкнется с таким окружением, он проверит, может ли он найти упомянутое имя файла. Если нет, он запишет тело окружения дословно в файл текущей директории и сообщит об этом действии. С другой стороны, если файл с таким именем будет обнаружен *LaTeX* 'ом, он проинформирует о том, что проигнорировал этот пример окружения filecotents, так как этот файл уже предоставлен.
Для получения списка всех, или почти всех файлов, использованных в документе, следует задать команду `\listfiles` в преамбуле.

Логическая структура

Стандартные классы *LaTeX* 'а содержат команды и окружения для определения разных иерархических структурных единиц документа (т.е. главы, разделы, приложения). Каждая такая команда определяет уровень вложенности внутри иерархии и каждую структурную единицу, принадлежащую тому или иному уровню.

Типичный документ состоит из заглавия, нескольких разделов, подразделяющихся, возможно, на более мелкие разделы, и списка литературы.

```
\documentclass{article}        % стандартный класс  ‘‘article’’
\begin{document}
\maketitle
\section{...}
\section{...}
   \subsection{...}
       \subsection{...}
\section{...}
\begin{thebibliography}   ... \end{thebibliography}
\end{document}
```

Рис.V.7. *Иерархическая структура простого LaTeX 'овского документа.*

Этот пример показывает вложенность структуры документа в *LaTeX* 'е. В случае класса article команда `\chapter` недоступна.

Для описания такой структуры используются команда, генерирующая заголовки `\maketitle`, команды секционирования `\section` и `\subsection` и окружение `thebibliography` (Рис.V.7). Команды должны быть правильно вложены. Например, команда `\subsection` должна применяться только после соответствующей команды `\section`.

Более длинные работы (такие как доклады, руководства и книги), имеющие более сложный титул, разбитые на главы и части, обеспечивают перекрестной информацией (оглавлением, списком иллюстраций, списком таблиц и указателем) и иногда имеют приложения. В таком документе легко различить вступительную часть, тело и заключительную часть (Рис.V.8).

Во вступительной части обычно используется так называемый вариант «со звездочкой» команды секционирования `\section`. Этот вариант подавляет нумерацию заголовков. Разделы с фиксированными именами, такие как Введение, Указатель и Предисловие, обычно не нумеруются. В стандартных классах команды `\tableofcontens`, `\listoftables`, `\listoffigures` и окружениях theindex и thebibliography вызывают изнутри команду (`\section` или `chapter`), используя свой вариант со звездочкой.

Команды секционирования

Стандартный *LaTeX* обеспечивает работу команд секционирования. Команда `\chapter` определяет нулевой уровень иерархической структуры документа, команда `\section` - первый уровень и так далее, до факультативной команды `\part`, которая определяет уровень - 1 (или нулевой в классах, где не определена команда `\chapter`). Не все из этих команд определены во всех классах документов: в классе article нет команды `\chapter`, а класс letter вообще не поддерживает команды секционирования.

```
\documentclass{book}         % стандартный класс  ‘‘book’’
\begin{document}
%--------------------- вступительная часть документа
\maketitle
   \section*{...}            % название раздела
\tableofcontents             % оглавление
\listoffigures               % список иллюстраций
\listoftables                % список таблиц
%---------------------- тело документа
\part{...}
\chapter{...}
    \section{...}
\chapter{...}
\part{...}
%-------------- заключительная часть документа
\appendix                     % приложение, разбитое на главы
\chapter{...}
\chapter{...}
\begin{thebibliography}   ... \end{thebibliography}
\begin{theindex}              \end{theindex}
\end{document}
```

Рис.V.8. *Иерархическая структура сложного LaTeX ’овского документа.*

В пакетах можно также определять дополнительные команды секционирования, используя либо дополнительные уровни, либо варианты уже существующих уровней.

Обычно команды секцирования автоматически выполняют одно или несколько изложенных ниже полиграфических действий;

- создают нумерацию заголовков, отражающую иерархический порядок;

- накапливают заголовки для размещения их в оглавлении (в файле с расширением .toc);

- сохраняют содержание заголовков для возможного использования в верхнем и/или нижнем колонтитулах;

- форматируют заголовки.

Стандартные команды секционирования *LaTeX* 'а

`\part(book и report)`	`уровень -1`	`\part(article)`	`уровень 0`
`\chapter`	`уровень 0`	`\section`	`уровень 1`
`\subsection`	`уровень 2`	`\subsubsection`	`уровень 3`
`\paragraph`	`уровень 4`	`\subparagraph`	`уровень 5`

Синтаксис команд секционирования

вид	нумерация	.toc	в/н колонтитулл
`\section{title}`	да	title	title
`\section[toc_entry]`	да	toc_entry	toc_entry
`\section{title}`	нет	нет	нет

Все команды секционирования имеют общий синтаксис. Команда, помеченная звездочкой (например, `\section*(...)`), подавляет нумерацию заголовка. Факультативный аргумент используется, когда текст в оглавлении и в верхнем и/ или нижним колонтитулах отличается от напечатанного заголовка.

Нумерация заголовков

Для поддержки нумерации *LaTeX* использует счетчик для каждой единицы секционирования и создает нумерацию заголовков из этих счетчиков. Возможные желаемые изменения, касающиеся нумерации заголовков, чаще всего связаны с изменением уровня вложенности, для которого должен быть создан номер. Это управляется счетчиком под названием secnumdepth, который отвечает за высший уровень с пронумерованными заголовками.Например, некоторые документы не содержат пронумерованных заголовков. Вместо того, чтобы каждый раз использовать вариант «со звездочкой» команд секционирования, удобнее счетчик secnumdepth установить в -2 в преамбуле документа. Преимущества этого метода заключаются в том, что может быть создано вхождение в оглавление и аргументы из команд секционирования могут создавать информацию в колонтитулах. Как было сказано выше, эти черты в отмеченном звездочкой варианте подавляются.

Чтобы пронумеровать все заголовки вплоть до `subparagraph` или до низшего уровня в данном классе, достаточно написать следующее:
`\setcounter{secnumdepth}{10}`

```
\newcounter{part}                          % (-1) части
\newcounter{chapter}                       % (0)  главы
\newcounter{section}{chapter}              % (1)  разделы
\newcounter{subsection}{section}           % (2)  подразделы
\newcounter{subsection}{subsection}        % (3)  подподразделы
\newcounter{paragraph}{subsection}         % (4)  пункты
\newcounter{subparagraph}{paragraph}       % (5)  подпункты
```

Рис.V.9. *Нумерация заголовка раздела*

В конечном счете использование команды `addtocounter` дает легкий способ нумерации большего или меньшего числа уровней, позволяя не беспокоиться по поводу уровневых номеров соответствующих команд секционирования. Например, если требуется еще один уровень нумерации, то можно просто добавить
`\addtocounter{secnumdepth}{1}`
в преамбуле документа.

Каждая команда секционирования имеет связанный с ней счетчик, который по договоренности называется так же, как команда секционирования (например, команда `\subsection` осуществляется вместе со счетчиком subsection). Этот счетчик содержит текущий номер для данной команды секционирования. Так, в классе report команды `\chapter`, `\section`, `\subsection` и т.д. представляют иерархическую структуру документа, а счетчик (например, subsection) следит за нумерацией подразделов (`\subsection`), используемых внутри текущего раздела (`\section`). Обычно когда работает счетчик на данном иерархическом уровне, все счетчики низшего уровня (т.е. те, у которых номера больше) перезагружаются. Так, например, файл класса report содержит определения, показанные на рисунке Рис.V.9.

Эти команды взаимодействуют с разными счетчиками. Счетчик первого уровня (раздела) перезагружается, когда работает счетчик нулевого уровня (главы), а так же счетчик второго уровня (подраздела) перезагружается, когда работает счетчик первого уровня (раздела). Тот же механизм действует по отношению к команде `\subparagraph`. В стандартных классах счетчик частей (part) полностью отделен от других счетчиков, и на него не влияют команды секционирования низшего уровня. Это означает, что главы в классах book или report или разделы в классе article будут пронумерованы последовательно, даже если вторгается команда `\part`. Изменить это просто, нужно заменить соответствующее определение счетчика глав, например:
`\newcounter{chapter}[part]` Поведение уже существующего счетчика может быть изменено с помощью команды `\@addtoreset`, например:
`\@addtoreset{chapter}{part}`
Надо помнить, что эта инструкция может быть использована только внутри некоего вспомогательного файла или в преамбуле документа, между командами `\makealetter` и `\makeatother`.

Каждый счетчик в *LaTeX* 'а, включая счетчики секционирования, имеет связанную с ним команду, созданную путем присоединения к имени счетчика префикса `\the`, который генерирует полиграфическое представление данного счетчика. В случае команд секционирования это представление используется для того, чтобы создать полный номер, связанный с командами, так как показано в следующих определениях:

```
\renewcommand{\thechapter}{\arabic{chapter}}
\renewcommand{\thesection}{\thechapter,\arabic{section}}
\renewcommand{\thesubsection}{\thesection,\arabic{subsection}}
```

В приведенном выше примере команда `\thesubsection` создает нумерацию арабскими цифрами счетчика subsection с помощью команды `\thesection`и точки. Этот вид рекурсивного определения упрощает модификации представления счетчика, так как изменения нужно сделать только в одном месте. Если, например, нужно пронумеровать главы, используя прописные буквы, надо переопределить команду `\thechapter`. Таким образом, меняя команды представления счетчика, можно изменить номер, демонстрируемый командой секционирования, Однако, изображение номера не может быть изменено произвольно с помощью этого метода. Команды изображения счетчика также используются механизмом перекрестных ссылок (команды `\label`, `\ref`).

Глава VI

Набор математических формул

VI.1 Набор формул в простейших случаях

Основные принципы

В документах *LaTeX* 'а, различают математические формулы внутри текста и «выключенные » (выделенные в отдельную строку). Формулы внутри текста окружаются знаками `$` (с обеих сторон). Выключенные формулы окружаются парами знаков доллара `$$` и `$$` с обеих сторон. Формулами считаются как целые формулы, так и отдельные буквы, в том числе греческие, а также верхние и нижние индексы и спезнаки. Пробелы внутри исходного текста, задающего формулу, игнорируются (на печати *LaTeX* сам сделает нужные пробелы; надо по-прежнему ставить пробелы, обозначающие конец команды); пустые строки не разрешаются. *LaTeX* расставляет пробелы в математических формулах автоматически (например, знак равенства окружается небольшими пробелами). Если надо оставить пробел перед или после внутритекстовой формулы, надо оставить его перед или после ограничивающего ее знака доллара. То же самое относится и к знакам препинания, следующим за внутритекстовой формулой: их также надо ставить после закрывающего формулу знака доллара. Каждая буква в формуле рассматривается как имя переменной и набирается шрифтом «математический курсив» (в отличии от обычного курсива, в нем увеличены расстояния между соседними буквами). Часть файла, составляющая математическую формулу, образует группу: изменения параметров, произведенные внутри формулы, забываются по ее окончании.

Степени и индексы

Степни и индексы набираются с помощью знаков `^` и `_` соответственно.

Катеты a, b треугольника связаны с гипотенузой формулой $c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Пифагора)	`Катеты $a$, $b$ треугольника связаны с гипотенузой $c$ формулой $c^2=a^2+b^2$(теорема Пифагора).`

Если индекс или показатель степени - выражение, состоящее более чем из одного символа, то его надо взять в фигурные скобки:

Из теоремы Ферма следует, что уравнение $$x^{1993}+y^{1993}=z^{1993}$$ не имеет решений в натуральных числах.	`Из теоремы Ферма следует, что`
	`уравнение`
	`$$`
	`x^{1993}+y^{1993}=z^{1993}`
	`$$`
	`не имеет решений в натуральных числах.`

Если у одной буквы есть как верхние, так и нижние индексы, то можно указать их в произвольном порядке.

Обозначение R^i_{jkl} для тензора кривизны было введено еще Риманом.	`Обозначение $R^i_{jkl}$ для тензора` `кривизны было введено еще Риманом.`

Если же требуется, чтобы верхние и нижние индексы располагались не один под другим, а на разных расстояниях от выражения, к которому они относятся, то нужно *LaTeX* немного обмануть, оформив часть индексов как индексы к “пустой формуле”:

Можно также написать $R_j{}^i{}_{kl}$, если важен порядок нумерации.	`Можно также написать $R_j{}^i{}_{kl}$,` `если важен порядок нумерации.`

Если необходимо написать формулу, читающуюся как “два в степени икс в кубе ”, то надо писать не `2^x^3`, а `2^{x^3}`: 2^{x^3}.

Дроби

Дроби, обозначаемые косой чертой (так рекомендуется обозначать дроби во внутритекстовых формулах), набираются непосредственно:

Неравенство $x+1/x\geq 2$ выполнено для всех $x>0$.	`Неравенство $x+1/x\geq 2$` `выполнено для всех $x>0$.`

Наряду со знаками нестрогих неравенств, *LaTeX* представляет большое количество специальных символов для математических формул (греческие буквы также рассматриваются как специальные символы.) Все эти символы набираются с помощью специальных команд (не требующих параметров).

Если в формуле используются десятичные дроби, в которых дробная часть отделена от целой с помощью запятой, то эту запятую следует взять в фигурные скобки:

$\pi\approx 3{,}14$	`$\pi\approx 3{,}14$`

Здесь команда `pi` порождает греческую букву π, а команда `\approx` - знак $\approx$ (‘приближенно равно’).

Дроби, в которых числитель расположен над знаменателем, набираются с помощью команды `\frac`. Эта команда имеет два обязательных аргумента: первый - числитель, второй - знаменатель. Пример:

$$\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{(a-b)^2}{4}=ab$$

```
$$
\frac{(a+b)^2}{4}+
\frac{(a-b)^2}{4}=ab
$$
```

Если числитель и/или знаменатель дроби записывается одной буквой (в том числе греческой) или цифрой, то можно не брать их в фигурные скобки:

$$\frac12+\frac x 2=\frac{1+x}2$$

```
$$\frac12+\frac x 2=\frac{1+x}2$$
```

Скобки

Круглые и квадратные скобки набираются как обычно, для фигурных скобок используются команды `\{` и `\}`, для других также есть специальные команды, например `\langle` (левая угловая скобка $\langle$). Команда `\left` перед открывающей скобкой в совокупности с командой `\right` перед соответствующей ей закрывающей скобкой позволяет автоматически выбрать нужный размер скобки.

$$1+\left(\frac{1}{1-x^{2}}\right)^3$$

```
$$1+\left(\frac{1}{1-x^{2}}
\right)^3$$
```

Корни

Квадратный корень набирается с помощью команды `\sqrt`, обязательным аргументом которой является подкоренное выражение; корень произвольной степени набирается с помощью той же команды `\sqrt` с необязательным аргументом - показателем корня (необязательный аргумент у этой команды ставится перед обязательным). Пример:

По общепринятому соглашению, $\sqrt[3]{x^3}=x$, но $\sqrt{x^2}=|x|$.

```
По общепринятому соглашению,
$\sqrt[3]{x^3}=x$,
но $\sqrt{x^2}=|x|.$
```

Штрихи и многоточия

Штрихи в математических формулах обозначаются знаком ' (и не оформляются как верхние индексы):

Результат	Исходный текст

Согласно формуле Лейбница, $$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$ Точнее говоря, формула Лейбница позволяет найти производную любого порядка от произведения двух функций.	`Согласно формуле Лейбница,`
	`$$(fg)''=f''g+2f'g' +fg''.$$`
	`Точнее говоря, формула Лейбница`
	`позволяет найти производную любого`
	`порядка от произведения двух`
	`функций.`

В математических формулах встречаются многоточия; *LaTeX* различает многоточие расположенное внутри строки (обозначается `\ldots`), и расположенное по центру строки (оно обозначается `\cdots`). Первое из них используется при перечислениях, второе - когда нужно заменить пропущенные слагаемые или сомножители:

Результат	Исходный текст

В детстве К.-Ф. Гаусс придумал, как быстро найти сумму $$1 + 2 + \cdots + 100 = 5050;$$ это случилось, когда школьный учитель задал классу найти сумму чисел $1,2,\ldots 100$.	`В детстве К.-Ф. ~Гаусс придумал,`
	`как быстро найти сумму`
	`$$1+2+\cdots+100=5050;$$`
	`это случилось, когда школьный`
	`учитель задал классу найти сумму`
	`чисел $1,2,\ldots 100$.`

Знак ~ после инициалов Гаусса мы поставили, чтобы фамилия не могла перенестись на другую строчку отдельно отдельно от инициалов. *LaTeX* позволяет использовать команду `\ldots` и в обычном тексте, вне математических формул, для знака многоточия.

Функции типа синус

Функции типа sin, log и т.д., имена которых надо набирать прямым шрифтом, набираются с помощью специальных команд (обычно одноименных с обозначениями соответствующих функций).

Результат	Исходный текст

Нетрудно видеть, что $\log_{1/16} 2 = -1/4$, а $\sin \pi/6 = 1/2$.	`Нетрудно видеть,`
	`что $\log_{1/16}2=-1/4$,`
	`а $\sin{\pi/6}=1/2$.`

Основание логарифма задается как нижний индекс.

VI.2 Как набирать формулы

Таблицы спецзнаков с комментариями

Начнем с греческих букв. Имя команды, задающей строчную греческую букву, совпадает с английским названием этой буквы (например, буква α задается командой `\alpha`). Некоторые греческие буквы имеют по два варианта начертаний; это отражено в следующей таблице.

Таблица.15. Команды греческих букв

α	`\alpha`	β	`\beta`	γ	`\gamma`
δ	`\delta`	ϵ	`\epsilon`	ε	`\varepsilon`
ζ	`\zeta`	η	`\eta`	θ	`\theta`
ϑ	`\vartheta`	ι	`\iota`	κ	`\kappa`
λ	`\lambda`	μ	`\mu`	ν	`\nu`
ξ	`\xi`	π	`\pi`	ϖ	`\varpi`
ρ	`\rho`	ϱ	`\varrho`	σ	`\sigma`
ς	`\varsigma`	τ	`\tau`	υ	`\upsilon`
ϕ	`\phi`	φ	`\varphi`	χ	`\chi`
ψ	`\psi`	ω	`\omega`		

Таблица.16. Команды прописных греческих букв

Γ	`\Gamma`	Δ	`\Delta`	Θ	`\Theta`
Λ	`\Lambda`	Σ	`\Sigma`	Υ	`\Upsilon`
Φ	`\Phi`	Π	`\Pi`	Ψ	`\Psi`
Ω	`\Omega`				

Имя команды, задающей прописную греческую букву, пишется с прописной буквы (например, буква ψ задается командой `\psi`). Некоторые прописные греческие буквы ('альфа', например) совпадают по начертанию с латинскими, и для них специальных команд нет - надо просто набирать соответствующую латинскую букву прямым шрифтом. **Не надо использовать греческие буквы Σ и Π из этой таблицы в качестве знаков суммы и произведения**; для этих целей есть специальные команды. В следующей таблице прописные греческие буквы, не совпадающие по начертанию с латинскими:

Следующая серия символов - символы, рассматриваемые *LaTeX* ом как символы бинарных операций (наподобие знаков сложения, умножения и т.п.). *LaTeX* оставляет в формуле небольшие пробелы по обе стороны этих знаков, кроме случаев, когда есть основания считать, что эти знаки используются не для обозначения операций, а для других целей. В следующей таблице полный список бинарных операций:

Таблица.17. Команды бинарных операций

$+$	`+`	$\star$	`\star`	$\pm$	`\pm`
$\mp$	`\mp`	$\times$	`\times`	$\div$	`\div`
$\setminus$	`\setminus`	$\cdot$	`\cdot`	$\circ$	`\circ`
$\bullet$	`\bullet`	$\cap$	`\cap`	$\cup$	`\cup`
$\uplus$	`\uplus`	$\sqcap$	`\sqcap`	$\sqcup$	`\sqcup`
$\vee$	`\vee`	$\wedge$	`\wedge`	$\odot$	`\odot`

Нумерация формул

В математических текстах обычно приходится для удобства ссылок нумеровать формулы. *LaTeX* позволяет организовать эту нумерацию таким образом, чтобы номера формул и ссылки на них генерировались автоматически. Нумеровать таким образом можно только *выключные* формулы. Делается это так.

Выключная формула должна быть оформлена как окружение equation (знаков `$$` быть не должно!). Каждая такая формула на печати автоматически пролучит номер. Чтобы на него можно было ссылаться, надо формулу пометить: в любом месте между `\begin{equation}` и `\end{equation}` поставить команду `\label`, и после этого команда `\ref` будет генерировать номер формулы. Рассмотрим несколько примеров:

$$\Psi(\vec{r})=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(\vec{k};\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}}}{|\vec{k}-\vec{k_0}|}dxdyd\varphi \tag{VI.1}$$

```
\begin{equation}\label{psi}
\Psi(\vec{r})=\int \limits_0^{\infty}
\int\limits_0^{\infty}\int
\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(\vec{k};
\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}}}{|\vec{k}
-\vec{k_0}|}dxdyd\varphi
\end{equation}
```

$$P=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^n\left\{\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}k^{2n}}{\sin n\tau}\right\}^2. \tag{VI.2}$$

```
\begin{equation}\label{P}
P \sum\limits_{n=1}^{\infty}
\sum\limits_{j=1}^n
\left\{\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}
k^{2n}}{\sin{n\tau}}\right\}^2.
\end{equation}
```

$$A=\left(\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{array}\right) \tag{VI.3}$$

```
\begin{equation}\label{A}
A= \left(
\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21}& a_{22} &\ldots  &a_{2n}\\
\vdots & \vdots &\ddots &\vdots  \\
a_{n1}& a_{n2} &\ldots & a_{nn}\\
\end{array}
\right)
\end{equation}
```

В формуле (VI.1) (`\ref{psi}`) функция Ψ непрерывно дифференцируема, в то время, как матрица A в формуле (VI.3) (`\ref{A}`) - кусочно-гладкая.

Глава VII

Импорт рисунков в формате "EPS"

VII.1 Импорт стандартных рисунков в *LaTeX*

Все современные графические пакеты программ способны осуществлять экспорт рисунков в формате *.EPS*. Для импорта этих файлов в *LaTeX* в преамбуле TEX- документа надо написать строчку:

`\usepackage{epsfig,psfig}`.

Команда, осуществляющая импорт рисунков в формате EPS в *LaTeX* имеет вид:

`\epsfig{file=BookGirl1.eps, width=7cm, angle=-30}`

Здесь приведена команда в сокращенном виде: первый параметр — название EPS-файла, помещенного в ту же директорию, в которой находится и *LaTeX* - файл. Второй параметр - ширина рисунка, третий параметр - угол поворота рисунка (этот параметр можно опустить).

В авторском стиле *Biblio*, в котором создана данная книга и в котором, как правило, работают наши курсовики и дипломники, существует несколько команд для импорта рисунков в этом универсальном формате, это, во-первых, команды:

```
\corel{#1}{#2}{#3} \Corel{#1}{#2}{#3} \CORELI{#1}{#2}{#3},
```

создающие рисунки в формате (EPS) шириной 7,10.5, 14 см., соответственно. Первым параметром этих команд является название EPS-файла, **находящегося в той же директории**, что и TEX-файл; последним параметром является метка этого рисунка на латыни. Вторым параметром этих команд является название рисунка.

Рисунки для импорта в *LaTeX* можно подготовить, например в графическом редакторе CorelDraw, Corel PHOTO-PAINT,Photoshop и других. При экспорте рисунков из этих программ необходимо первоначально выполнить условие по ширине экспортируемого рисунка.

Я не рекомендую экспортировать в *LaTeX* цветные фотографии, так как при не слишком больших размерах EPS-файлов качество передачи цвета оставляет пока желать лучшего, а слишком большие файлы долго загружаются при просмотре. Рисунки в отличие от фотографий (даже цветные) получаются уже лучше, и их качество вполне приемлемо при не слишком больших размерах EPS-файлов, что видно из приведенного ниже Рис.VII.10, который был получен импортом из CorelDraw. В этом случае размер EPS-файла составляет примерно 510КБт. Впрочем, без наличия цветного принтера, цвет изображений вряд ли будет нас особенно волновать.

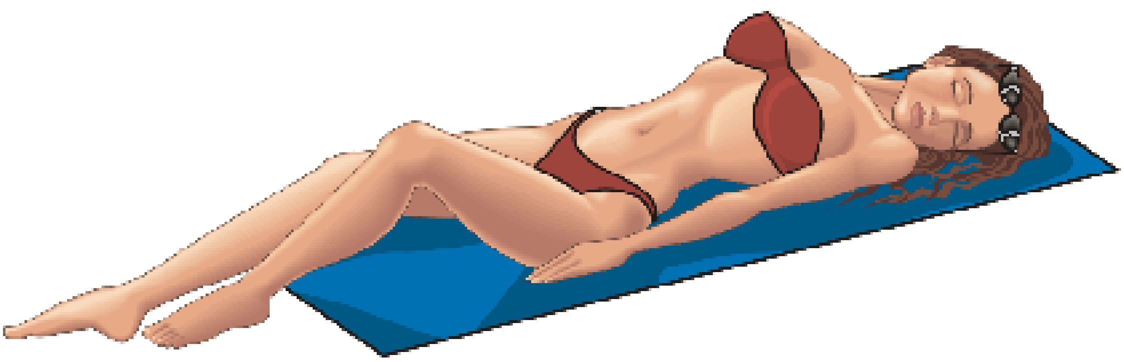


Рис.VII.10. *"Девушка на берегу моря, принимающая солнечную ванну" - пример импорта рисунка из CorelDraw в формате .eps*

```
\CORELI{Sunbath}{"Девушка, принимающая солнечную ванну" - пример
импорта рисунка из CorelDraw в формате .eps}{Sunbath}
```

Четырех-параметрические команды:

`\corell{#1}{#2}{#3}{#4}` и
`\corelr{#1}{#2}{#3}{#4}`
служат для помещения рисунка в среду текста.

```
\corell{ris83}{График}{FigCorel}{При этом команда
$\setminus$corell помещает рисунок шириной 7см слева от текста, а
```

```
команда $\setminus$corelr -справа от текста. Первые три параметра
этих команд такие же, как и в команде $\setminus$corel, четвертым
параметром служит помещаемый текст. Здесь мы приводим пример
обычного черно-белого рисунка \ref{FigCorel}, выполненного в
CorelDraw. }
```

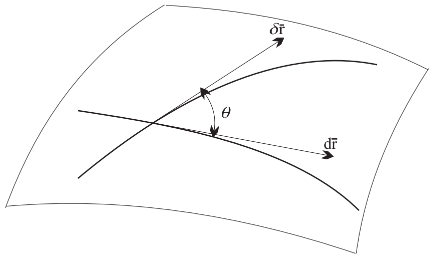


Рис.VII.11. *График*

При этом команда \corell помещает рисунок шириной 7см слева от текста, а команда \corelr -справа от текста. Первые три параметра этих команд такие же, как и в команде \corel, четвертым параметром служит помещаемый текст. Здесь мы приводим пример обычного черно-белого рисунка Рис.VII.11, выполненного в CorelDraw.

VII.2 Экспорт Maple-файлов в *LaTeX*

Для экспорта Maple-файла в *LaTeX* необходимо выбрать в меню Maple/File/Export/Latex и экспортировать Maple в ту же директорию, в которой находится TEX-файл. При этом Maple создает группу файлов, один из которых имеет расширение “.tex”.

В преамбуле tex-файла кроме обычных будут выписаны следующие строчки, содержащие название пакета и дополнительные определения:

```
\usepackage{maple2e}
\def\emptyline{\vspace{12pt}}
\DefineParaStyle{Maple Output} \DefineParaStyle{Maple Plot}
\DefineParaStyle{Normal} \DefineParaStyle{Normal}
\DefineParaStyle{Warning} \DefineCharStyle{2D Comment}
\DefineCharStyle{2D Math} \DefineCharStyle{2D Output}
\DefineCharStyle{Page Number}
```

Для того, чтобы *LaTeX* работал, необходимо поместить соответствующий стилевой файл либо в рабочую директорию, либо в директорию

`C:\localtexmf\tex\latex\`.

Необходимые стилевые файлы находятся в директориии `\ETC` в рабочей директории пакета Maple.

Наилучший способ импорта в *LaTeX* Maple-файлов заключается в использовании команды

`\input название.tex` для вставки содержимого полученного файла в основной tex-документ. При этом необходимо скопировать недостающие команды из преамбулы полученного файла в преамбулу основного tex-документа, а преамбулу и окончание полученного при экспорте tex-файла необходимо закоментировать. Необходимо также закоментировать и команду в преамбуле `\pagestyle{empty}`.

Ниже мы приводим пример экспорта стандартного программно- формульного Maple-файла в *LaTeX* :

Начало экспорта

Пример экспорта Maple-файла в LaTeX

```
> psi:=Sum(n/(1+n^2)^2,n=0..infinity)=
> sum(n/(1+n^2)^2,n=0..infinity);
```

$$\psi := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\, I\, \Psi(1,\, -I) + \frac{1}{4}\, I\, \Psi(1,\, I)$$

```
> Psi(a):=Int(exp(-a*x^2)*x^2,x=0..infinity)=
> int(exp(-a*x^2)*x^2,x=0..infinity);
```

$$\Psi(a) := \int_0^{\infty} e^{(-a\,x^2)}\, x^2\, dx = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}\, \frac{-2\, e^{(-a\,x^2)}\, x\, a^{(3/2)} + \sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}(\sqrt{a}\, x)\, a}{a^{(5/2)}}$$

Конец экспорта

Заметим, что большие Maple-файлы лучше первоначально разбить на куски, копируя их в отдельные файлы, а затем уже экспортировать их в *LaTeX* .

VII.3 Экспорт рисунков из Maple в *LaTeX*

Экспорт графиков из Maple может быть произведен двумя различными способами. Первый дословно повторяет только что описанную процедуру. При этом, если мы хотим получить отдельно график без сопровождающей его программы, то необходимо предварительно скопировать его в отдельный Maple-файл. При этом Maple создает графики в формате EPS. Второй способ состоит в экспорте лишь отдельного графика в формате PS или EPS. Ниже показано, как, например, осуществить экспорт графиков в формате PS. Для осуществления экспорта в формате PS необходимо просто заменить в программе "eps"на "ps".

Пример экспорта графика в формате EPS

```
> restart:
> X(u,v):=cos(u)*cos(v);
> Y(u,v):=sin(u)*cos(v);
> Z(u,v):=sin(v);
> R:=[X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)];
```

$$\mathrm{X}(u,\, v) := \cos(u)\cos(v)$$

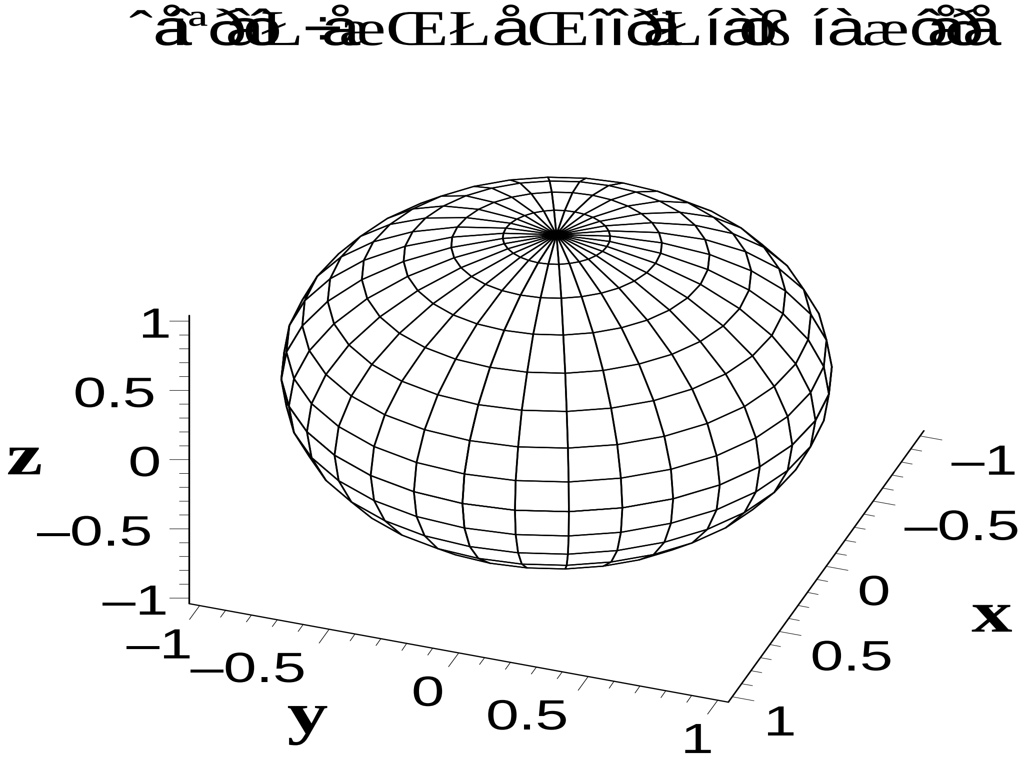
$$\mathrm{Y}(u,\, v) := \sin(u)\cos(v)$$

$$\mathrm{Z}(u,\, v) := \sin(v)$$

$$R := [\cos(u)\cos(v),\, \sin(u)\cos(v),\, \sin(v)]$$

Здесь мы показываем оригинал в Maple

```
> plot3d(R,u=0..2*Pi,v=0..2*Pi,thickness=1,style=PATCH,color=white,scal
> ing=CONSTRAINED,orientation=[20,45],numpoints=1000,axes=FRAME,
> labels=[x,y,z],labelfont= [TIMES,BOLD,14],thickness=0,titlefont=
> [TIMES,ROMAN,12],title=‘Географические координаты на сфере‘);
```



Здесь мы экспортируем два рисунка. Обращаем внимание на синтаксис пути \ заменяется на / !

Мы здесь, однако, не будем давать названия рисунку, а почему, объясним позже.

```
> plotsetup(ps,plotoutput=‘C:/MyDip/Sphere.eps‘,
> plotoptions=‘width=7cm,noborder‘):
> plot3d(R,u=0..2*Pi,v=0..2*Pi,style=PATCH,color=white,scaling=CONSTRAIN
> ED,orientation=[20,45],numpoints=1000,axes=FRAME,
> labels=[x,y,z],labelfont= [TIMES,ROMAN,12],thickness=0);
> plotsetup(ps,plotoutput=‘C:/MyDip/Dirka.eps‘,
> plotoptions=‘width=7cm,noborder‘):
> plot3d(R,u=0..2*Pi,v=-Pi/2..3*Pi/8,style=PATCH,color=white,scaling=CON
> STRAINED,orientation=[20,45],numpoints=1000,axes=FRAME,
> labels=[x,y,z],labelfont= [TIMES,ROMAN,12],thickness=0);
```

Видны существенные недостатки прямого экспорта графического Maple-файла в *LaTeX* . Во-первых, изображение деформируется, а, во-вторых, название рисунка и метки на русском языке мягко говоря не совсем адекватно передаются при экспорте. Поэтому я рекомендую воспользоваться вторым способом экспорта графики, причем не придавая рисункам названий. Этот рисунок затем может быть дополнен какими-либо деталями в графическом редакторе типа CorelDraw и взят непосредственно в текст командой типа `\direps{Sphere}{Географические координаты на сфере}{spher}`, где последний параметр - название ссылки на рисунок. Из приведенных ниже двух примеров видно, что качество рисунков становится выше.

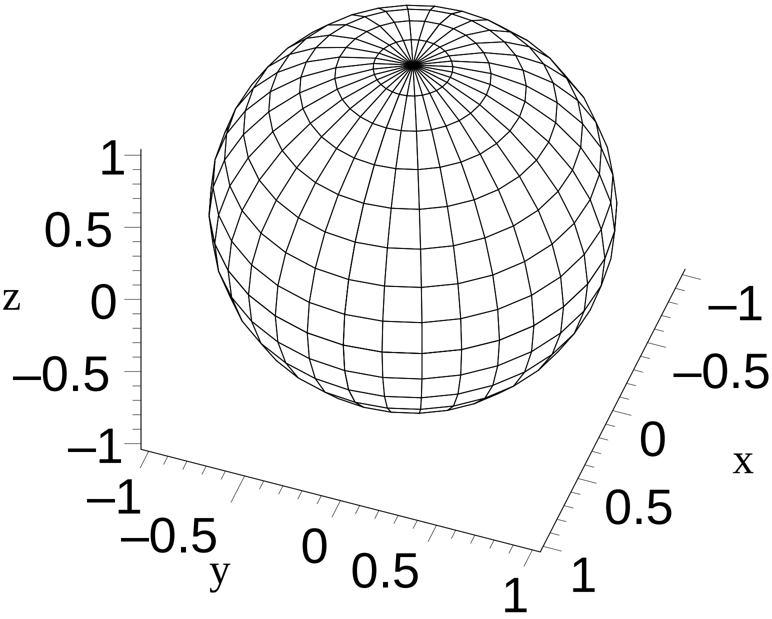


Рис.VII.12. *Географические координаты на сфере*

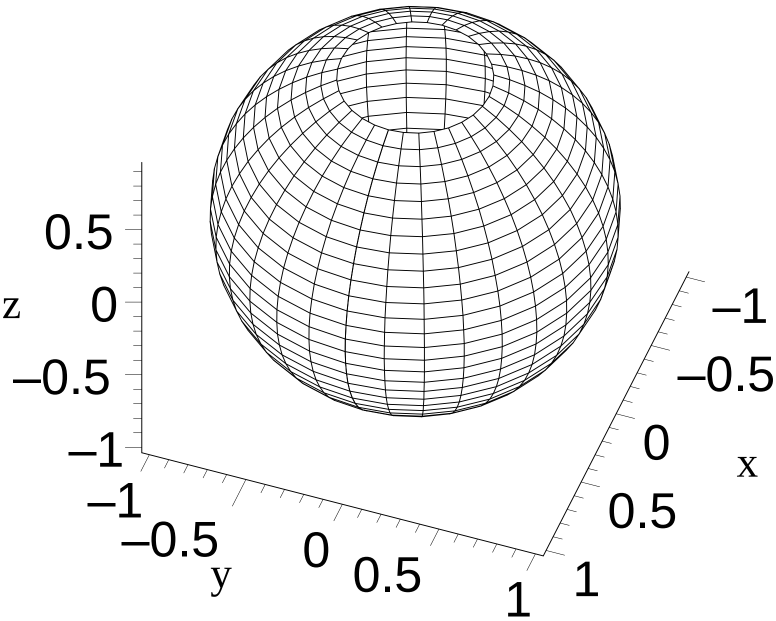


Рис.VII.13. *Сфера с дыркой*

```
\z{\direps}[3]{\SMesto{7}{\refstepcounter{figure}
\epsfig{file=#1.eps,width=8cm,angle=-90}\label{#3} \vskip 12pt
\noindent {\bf \thefigure.}\hskip 12pt{\sl #2\hfill}}}
```

Совместное использование Maple и CorelDraw

Опишем довольно стандартную процедуру подготовки графиков, экспортированных из Maple:

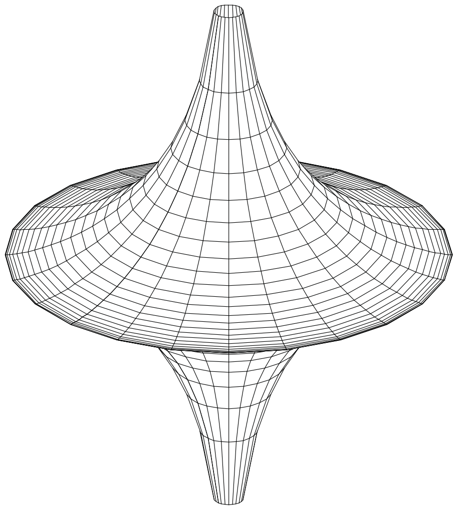


Рис.VII.14. *Пример импорта из Maple графика псевдосферы*

1. Соответствующий файл в PS- или EPS-формате открывается с помощью CorelDraw;
2. Полученный рисунок преобразуется с помощью поворота на угол =-90^o;
3. Делаются необходимые добавления к рисунку;
4. Весь рисунок помечается, группируется, приводится к нужному размеру и помещается в левом верхнем углу планшета CorelDraw ;
5. Осуществляется экспорт этого рисунка в EPS-формате в требуемую директорию (см. Рис.VII.14.)

```
\corell{Psevdo}{Пример импорта из Maple графика
псевдосферы}{Psevdo}{\begin{enumerate}
\item Соответствующий файл в PS- или  EPS-формате открывается с помощью
CorelDraw;
\item
Полученный рисунок преобразуется с помощью поворота на угол
=-90$^o$;
\item
Делаются необходимые добавления к рисунку;
\item
Весь рисунок помечается, группируется, приводится к нужному
размеру и помещается в левом верхнем углу планшета CorelDraw ;
\item Осуществляется экспорт этого рисунка в EPS-формате в
требуемую директорию (см. \ref{Psevdo}.)
\end{enumerate}}
```

Глава VIII

Примеры индивидуальных заданий

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{1}}$

Задача № 1. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 21 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{2^2+\pi^2}}{\sqrt{2}+\log_3 10}.$$

Задача № 1. 2 Привести к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x+3}-\frac{x^2}{x}.$$

Задача № 1. 3 Решить систему иррациональных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \\ x-2y+1=0. \end{cases}$$

Задача № 1. 4 Решить неравенство:

$$3-\frac{2x-17}{x-5}>\frac{x-5}{x+2}.$$

Задача № 1. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 1. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

Задача № 1. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial x}$ функции:

$$f(x,y,z) = xy^2z^3(12 - x - 2y - 3z)$$

и вычислить ее значение в точке $M(2,1,1)$.

Задача № 1. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Задача № 1. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}dx.$$

Задача № 1. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \sqrt{8x^2 - x4}$$

-темно-синим цветом и

$$\gamma_2 : y = -\sqrt{8x^2 - x4},$$

- красным, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 1. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями (геликоид):

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (t\cos\phi, t\sin\phi, \phi u).$$

Задача № 1. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$(1 - x^2)e^{1 - \cos^2 x}$$

в окрестности точки $x = 1$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 1. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad xyz = 1.$$

Задача № 1. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t^2, t^3, 1)$ и $\vec{b} = (1, 3t^2, \sin t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 1. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 43B$ и произведения AB и BA.

Задача № 1. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 1. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^x(x^2 - x + 2).$$

Задача № 1. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 1. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \ln(1+x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = \cos(x)^2$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{2}$

Задача № 2. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{4^3+\sin^3(\pi/12)}}{\log_\pi 12}.$$

Задача № 2. 2 Привести подобные члены в выражении:

$$a(x-1)^3+3bx^2-4+2x$$

по степеням x.

Задача № 2. 3 Решить систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)=xyz \\ 10(y^2+z^2)=29xyz \\ 5(z^2+x^2)=13xyz. \end{cases}$$

Задача № 2. 4 Решить неравенство:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}>0.$$

Задача № 2. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 2. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}.$$

Задача № 2. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=e^{-x^2}$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,1)$.

Задача № 2. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx.$$

Задача № 2. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx.$$

Задача № 2. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$$

- темно-синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2},$$

- красным, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 2. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями (нижняя половина псевдосферы):

$$\Sigma : \qquad \vec{r} = (\sin t \cos\phi, \sin t \sin\phi, \cos t + \ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2})).$$

Задача № 2. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{1+x+x^2+x^3}{1-x+x^2-x^3}$$

в окрестности точки $x = 1$ по степеням x до седьмой степени. Сравнить на графике поведение функции (красным цветом)и ее разложения (черным цветом) на интервале $x \in [-1, 2]$.

Задача № 2. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad (x^2+y^2) + z = 1.$$

Задача № 2. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t, \cos t, t)$ и $\vec{b} = (\operatorname{sh} t^2, \operatorname{ch} t^2, 1)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 2. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 2B$ и произведения AB и BA.

Задача № 2. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 2. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x(\sin x + \cos x).$$

Задача № 2. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 2. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} - \cos^2 x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy^2 = x^2 + x$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 2\pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{3}}$

Задача № 3. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 32 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{e^{-\sin(\pi^2)}\log_5 \sin\left(\dfrac{1}{\pi^2+1}\right)}{1+\sqrt{\pi^3}}.$$

Задача № 3. 2 Привести подобные члены в выражении:

$$a(\cos^3 x - bx)^2 - (c + d\cos x)(\sin x - 1)^2 + 2\sin x$$

по степеням $\cos x$ и $\sin x$.

Задача № 3. 3 Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{17+5x} - \sqrt{19-5x} = 3.$$

Задача № 3. 4 Решить неравенство:

$$x^4 - 5x^2 + 4 < 0.$$

Задача № 3. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 3. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x).$$

Задача № 3. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ функции:

$$f(x,y) = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$$

и вычислить ее значение в точке $M(1, \dfrac{\pi}{4})$.

Задача № 3. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Задача № 3. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}dx.$$

Задача № 3. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

- темно-синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1},$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 3. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos t\cos\phi, \cos t\sin\phi, t^5 + 4\phi).$$

Задача № 3. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{1-\sin x - e^{-\dfrac{x^2}{2}}}{x^4}$$

в окрестности точки $x = 1$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (черным цветом)и ее разложения (серым цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 3. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad (x+y)^2 + z^2 = 1.$$

Задача № 3. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\log_2 t, \log_4 t, \operatorname{tg} t)$ и $\vec{b} = (t, t^2, 1-t^2)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 3. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + 3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 3. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 3. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + +\frac{dy}{dx} + 4y = e^{-x}(1+\sin x).$$

Задача № 3. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 3. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cos^2 x \frac{dy}{dx} + xy^3 = x^2$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 2\pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{4}$

Задача № 4. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_2(1+\cos\frac{1}{4}+\log_{\sqrt{2}}(\sin(4/\pi)))}{(1+\operatorname{tg}1/3)}.$$

Задача № 4. 2 Привести подобные члены в выражении:

$$a(x-y)^3+3b(x+y)^2-4+2(x+y^2)$$

по степеням x и y.

Задача № 4. 3 Решить алгебраическое уравнение:

$$x^4+(x-4)^4=82$$

Задача № 4. 4 Решить неравенство:

$$\frac{5}{3-2x-x^2}<1.$$

Задача № 4. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 4. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

Задача № 4. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial x}$ функции:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$$

и вычислить ее значение в точке $M(2,1,-1)$.

Задача № 4. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\sin^5 x\cos^5 x dx.$$

Задача № 4. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

Задача № 4. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}},$$

- фиолетовым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 4. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos t \cos \phi, \cos t \sin \phi, t^3 + 2\phi).$$

Задача № 4. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 4. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^2 + y^2 - z = 1.$$

Задача № 4. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$ и $\vec{b} = (t, -t^2, t^3)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 4. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $A - B$ и произведения AB и BA.

Задача № 4. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 4. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x + \cos x + 1.$$

Задача № 4. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 4. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\cos x \frac{d^2y}{dx^2} - \cos^2 x \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 1.5]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{5}$

Задача № 5. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 21 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{2^2+\pi^2}}{\sqrt{2}+\log_3 10}.$$

Задача № 5. 2 Привести подобные члены в выражении:

$$a(\ln x - x)^2 - (\ln x + x)^3 - (\ln x - 1)^2 + 2x^2$$

по степеням $\ln x$ и x.

Задача № 5. 3 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^4 + 4\log_3 y = 2 \\ y^{x^4} = \sqrt[4]{3}. \end{cases}$$

Задача № 5. 4 Решить неравенство:

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 1.$$

Задача № 5. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 5. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}.$$

Задача № 5. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial x}$ функции:

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,1,1)$.

Задача № 5. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \sin 5x \cos x dx.$$

Задача № 5. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx.$$

Задача № 5. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \sin x + \cos^2 x$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x,$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 5. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями (тор):

$$\Sigma : \quad \vec{r} = ((2+\cos(v))\cos(u), (2+\cos(v))\sin(u), \sin(v)].$$

Задача № 5. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 5. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^{3/2} + y^{3/2} - z = 0.$$

Задача № 5. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (t^2, -t, 2t)$ и $\vec{b} = (2t, -3t, t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 5. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $1/2A - 3/2B$ и произведения AB и BA.

Задача № 5. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 5. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = \sin 2x.$$

Задача № 5. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 5. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx} + y^2 = 1$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{6}}$

Задача № 6. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\right)\arcsin\left(\frac{1}{\pi^2+1}\right)}{\operatorname{arctg}\pi^3}.$$

Задача № 6. 2 Рационализировать дробь:

$$\frac{\sqrt{2}+3}{1+\sqrt[3]{2}}.$$

Задача № 6. 3 Решить тригонометрическое уравнение:

$$\cos^2 x+\cos^2\frac{3x}{4}+\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{4}=2.$$

Задача № 6. 4 Решить неравенство:

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача № 6. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 6. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Задача № 6. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial x}$ функции:

$$f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$$

и вычислить ее значение в точке $M(2,1,1)$.

Задача № 6. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

Задача № 6. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx.$$

Задача № 6. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

- черным цветом и

$$\gamma_2 : y = \sin x \cdot \sin 3x,$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 6. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями (тор):

$$\Sigma : \quad \vec{r} = ((1+\cos(v))\cos(u), (1+\cos(v))\sin(u), \sin(v)].$$

Задача № 6. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (красным цветом)и ее разложения (черным цветом) на интервале $x \in [-1, 1]$.

Задача № 6. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad \frac{z}{1+z^2} - ye^{-xy} = 0.$$

Задача № 6. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t, \cos t, t)$ и $\vec{b} = (t^2, -\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, $\dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 6. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 2B$ и произведения AB и BA.

Задача № 6. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 6. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}(1 + x).$$

Задача № 6. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 6. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\left|\frac{dy}{dx}\right| + y^2 = x^2e^{-x}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{7}$

Задача № 7. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 32 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{\sin^2(\pi^2)+2}+\sqrt{\pi^2+4}}{e^2+e^3}.$$

Задача № 7. 2 Рационализировать дробь:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Задача № 7. 3 Решить логарифмическое уравнение:

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$$

Задача № 7. 4 Решить неравенство:

$$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3.$$

Задача № 7. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 7. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}.$$

Задача № 7. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial x}$ функции:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{2}$$

и вычислить ее значение в точке $M(1,1,1)$.

Задача № 7. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx.$$

Задача № 7. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1} dx.$$

Задача № 7. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \sqrt{x^2+1} \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 7. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = ((2+\operatorname{ch}(v))\cos(u), (2+\operatorname{ch}(v))\sin(u), \sin(v)),$$

задавая интервал изменения переменной v поочередно $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[0,4]$ и т.д.

Задача № 7. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (черным цветом)и ее разложения (серым цветом) на интервале $x \in [-1,1]$.

Задача № 7. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad \sin x + \sin y + \sin z = 1.$$

Задача № 7. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\ln t, \sin t, \operatorname{tg} t)$ и $\vec{b} = (e^t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 7. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + 3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 7. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 7. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - y = e^x(\sin x + 1).$$

Задача № 7. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 7. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\ln(1 + x)\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} + xy^2 = -\cos^2 x$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII
ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{8}$

Задача № 8. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 29 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_3(\sin^2(\pi^2)+1)+\log_4(\pi^2+1)}{\log_2(1+\sqrt{\pi^2+2^3})}.$$

Задача № 8. 2 Рационализировать дробь:

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{4}}.$$

Задача № 8. 3 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{3xy}{x+y}=5 \\ \dfrac{2xz}{x+z}=3 \\ \dfrac{yz}{y+z}=4. \end{cases}$$

Задача № 8. 4 Решить неравенство:

$$\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x.$$

Задача № 8. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 8. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}.$$

Задача № 8. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,1)$.

Задача № 8. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx.$$

Задача № 8. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

Задача № 8. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

- серым цветом и

$$\gamma_2 : y = \frac{\cos x}{\cos 2x},$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 8. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = ((1+\sinh(v))\cos(u), (1+\sinh(v))\sin(u), \sin(v)),$$

задавая интервал изменения переменной v поочередно $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[0,4]$ и т.д.

Задача № 8. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 8. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad \ln(\sqrt{x^2+y^2} + |z|) = 1.$$

Задача № 8. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, t^3)$ и $\vec{b} = (t, -t^2, \sin t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, $\dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 8. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - B$ и произведения AB и BA.

Задача № 8. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 8. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x^3 - x + \sin x.$$

Задача № 8. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 8. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\ln(1+x)\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy^2 = x^2$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

СЕМЕСТР IV-VII
ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{9}}$

Задача № 9. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 25 значащими цифрами) значения выражения:
$$\frac{\operatorname{arctg}(\pi^2+\pi^{-2})+\operatorname{arcctg}(\pi^2+1)}{\arcsin(1-\pi^{-2})}.$$

Задача № 9. 2 Рационализировать дробь:
$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}.$$

Задача № 9. 3 Решить алгебраическое уравнение:
$$x^3-6x^2-x+30=0.$$

Задача № 9. 4 Решить неравенство:
$$x-4<\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}.$$

Задача № 9. 5 Вычислить сумму:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}$$
и найти ее приближенное значение.

Задача № 9. 6 Найти значение предела
$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}).$$

Задача № 9. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:
$$f(x,y)=e^{x^2-y}(5-2x+y)$$
и вычислить ее значение в точке $M(0,1)$.

Задача № 9. 8 Вычислить неопределенный интеграл:
$$\int\sqrt{x^3+x^4}dx.$$

Задача № 9. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$$

Задача № 9. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = x + \operatorname{arctg} x$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = x + \operatorname{arcctg} x,$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 9. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos^3 t \cos^3 \phi, \cos t \sin \phi, t^5 + 4\phi).$$

Задача № 9. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 9. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Задача № 9. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t^2, t^3, 1)$ и $\vec{b} = (1, 3t^2, \sin t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, $\dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 9. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - B$ и произведения AB и BA.

Задача № 9. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 9. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = e^x(x^3 - x).$$

Задача № 9. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 9. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$(1 + x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy^2 = \operatorname{arctg}^2 x$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{10}}$

Задача № 10. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\operatorname{ch}(2^2+1)+\operatorname{sh}(\pi^2+1)}{\operatorname{arch}(1+\pi^{-2})}.$$

Задача № 10. 2 Рационализировать дробь:

$$\frac{\sqrt{a}+b}{1+\sqrt[c]{d}}$$

Задача № 10. 3 Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{17+5x}-\sqrt{19-5x}=3.$$

Задача № 10. 4 Решить неравенство:

$$\log_{(2x+4)} x^2+1 \le 1.$$

Задача № 10. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 10. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}.$$

Задача № 10. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ функции:

$$f(x,y)=\sin x \sin y \sin{(x+y)}$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,\pi.)$

Задача № 10. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x^3 \ln^3 x.$$

Задача № 10. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}, dx$$

учитывая, что параметр n принимает целые положительные значения.

Задача № 10. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{\arcsin 2x}{1+x^2}$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \arccos \frac{1-x}{1-2x},$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 10. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos^3 t \cos\phi, \cos^3 t \sin\phi, t^3 + 2\phi).$$

Задача № 10. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (красным цветом)и ее разложения (черным цветом) на интервале $x \in [-1, 1]$.

Задача № 10. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad (x+y)^3 + z^3 = 1.$$

Задача № 10. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t, \cos t, t)$ и $\vec{b} = (\operatorname{sh} t^2, \operatorname{ch} t^2, 1)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, $\dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 10. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - B$ и произведения AB и BA.

Задача № 10. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 10. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$24\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = e^{x/2}(\sin x + \cos x + 1).$$

Задача № 10. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 10. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{1}{2}(1 + x^3)\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^3 = \ln(1 + x^2)$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{11}}$

Задача № 11. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{4^3+\sin^3(\pi/12)}}{\log_\pi 12}.$$

Задача № 11. 2 Раскрыть скобки в выражении:

$$(x+2)^3(x-4)^2.$$

Задача № 11. 3 Решить алгебраическое уравнение:

$$x^4+(x-4)^4=82.$$

Задача № 11. 4 Решить неравенство:

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\frac{x-1}{x}>0.$$

Задача № 11. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 11. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}.$$

Задача № 11. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

и вычислить ее значение в точке $M(1,2)$.

Задача № 11. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx.$$

Задача № 11. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^0 (x \ln x)^2 dx.$$

Задача № 11. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 11. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{sh} t \cos\phi, \operatorname{sh} t \sin\phi, \operatorname{ch} t + 2\phi),$$

задавая интервал изменения переменной t поочередно $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[0,4]$ и т.д.

Задача № 11. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - x^2}{x^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до восьмой степени. Сравнить на графике поведение функции (красным цветом)и ее разложения (черным цветом) на интервале $x \in [-1,1]$.

Задача № 11. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad \frac{z}{1+z^2} - y^3 e^{-xyz} = 0.$$

Задача № 11. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t, \cos t, t)$ и $\vec{b} = (t^2, -\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d^3\vec{a}}{dt^3}$, $\dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 11. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 2B$ и произведения AB и BA.

Задача № 11. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 11. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^x(x^2 - x + 2).$$

Задача № 11. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 11. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\sqrt{1+x}\frac{d^2y}{dx^2} + (1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+x^2}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 100]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{12}}$

Задача № 12. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 32 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{e^{-\sin(\pi^2)}\log_5 \sin\left(\dfrac{1}{\pi^2+1}\right)}{1+\sqrt{\pi^3}}.$$

Задача № 12. 2 Раскрыть скобки в выражении:

$$(x^2-z^2)(x(x-1)+z(x+1)^2).$$

Задача № 12. 3 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Задача № 12. 4 Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2+4x+4}<x+6..$$

Задача № 12. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x)^n}{n}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 12. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Задача № 12. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial x}$ функции:

$$f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,\dfrac{\pi}{4},\pi)$.

Задача № 12. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x^5 \sin 5x dx.$$

Задача № 12. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$$

Задача № 12. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = (x+2)^{\frac{1}{x}},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 12. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos t \cos \phi, \cos t \sin \phi, \sin t \sin \phi),$$

задавая интервал изменения переменной t поочередно $[0, \pi/2]$, $[0, \pi]$, $[0, 3\pi/2]$, $[0, 2\pi]$ и т.д.

Задача № 12. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до восьмой степени. Сравнить на графике поведение функции (черным цветом)и ее разложения (серым цветом) на интервале $x \in [-1, 1]$.

Задача № 12. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^3 \sin x^2 + y^3 \sin y^2 + z^3 \sin z^2 = 1.$$

Задача № 12. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\ln t, \sin t, \operatorname{tg} t)$ и $\vec{b} = (e^t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d^2\vec{a}}{dt^2}, \dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 12. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + 3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 12. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 12. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x(\sin x + \cos x).$$

Задача № 12. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 12. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$(1+x)^3\frac{d^2y}{dx^2} + (1+x^2)^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \sqrt[3]{1+y^2} = \frac{1}{2+\sin(x)}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 20]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{13}}$

Задача № 13. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_2(1+\cos\dfrac{1}{4}+\log_{\sqrt{2}}(\sin(4/\pi)))}{(1+\operatorname{tg}1/3)}.$$

Задача № 13. 2 Привести к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-3}{x-1}.$$

Задача № 13. 3 Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}.$$

Задача № 13. 4 Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-5x+7\right)<0.$$

Задача № 13. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 13. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.$$

Задача № 13. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,1,)$.

Задача № 13. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3dx.$$

Задача № 13. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x.dx$$

Задача № 13. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = 2^{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2-1},$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 13. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{sh} t \cos\phi, \operatorname{ch} t \sin\phi, \sin t + \phi),$$

задавая интервал изменения переменной t поочередно $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[0,4]$ и т.д.

Задача № 13. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\operatorname{ch} x - e^{\operatorname{ch} x} - 1)}{x^4}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 13. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = z^2.$$

Задача № 13. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, t^3)$ и $\vec{b} = (t, -t^2, \sin t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d^2\vec{a}}{dt^2}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 13. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $A - B$ и произведения AB и BA.

Задача № 13. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 13. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{-x}(1 + \sin x).$$

Задача № 13. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 13. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$(1 + \sin^2(x))\frac{d^2y}{dx^2} + (1 + cos^2 x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \sqrt[4]{1 + y^2} = -\sqrt[3]{1 + sin^6(x)}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 100]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{14}}$

Задача № 14. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 21 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{2^2+\pi^2}}{\sqrt{2}+\log_3 10}.$$

Задача № 14. 2 Привести к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x+3}-\frac{x^2}{x}.$$

Задача № 14. 3 Решить систему иррациональных уравнений:

$$\begin{cases} (x+y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x+y^2}=65 \\ (x-y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x+y^2}=185. \end{cases}$$

Задача № 14. 4 Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>0$$

Задача № 14. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 14. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

Задача № 14. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$$

и вычислить ее значение в точке $M(-1,1)$.

Задача № 14. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx.$$

Задача № 14. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$$

Задача № 14. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = x^{\frac{1}{x}}$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = 1 + x^{\frac{1}{x}},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 14. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, \operatorname{ch} u).$$

Задача № 14. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$(1-x)\log_x 2$$

в окрестности точки $x = 1$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [+0, \pi]$.

Задача № 14. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^3 + y^3 + \sin^3 z = 1.$$

Задача № 14. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t^2, t^3, 1)$ и $\vec{b} = (1, 3t^2, \sin t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d^2\vec{a}}{dt^2}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 14. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $1/2A - 3/2B$ и произведения AB и BA.

Задача № 14. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 14. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x + \cos x + 1.$$

Задача № 14. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 14. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (1 + \cos x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \sqrt[3]{1 + y^2} = \sqrt{1 + \sin^6 x}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 100]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{15}}$

Задача № 15. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\right)\arcsin\left(\frac{1}{\pi^2+1}\right)}{\operatorname{arctg}\pi^3}.$$

Задача № 15. 2 Привести подобные члены в выражении:

$$a(x-1)^3+3bx^2-4+2x$$

по степеням x.

Задача № 15. 3 Решить логарифмическое уравнение:

$$7\sqrt{\lg x}+2\lg x-9=0.$$

Задача № 15. 4 Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{x+5}}{1-2x}<1.$$

Задача № 15. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 15. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}3x.$$

Задача № 15. 7 Найти производную $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$$

и вычислить ее значение в точке $M(2,1,)$.

Задача № 15. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x\operatorname{arctg}(x+1)dx.$$

Задача № 15. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx.$$

Задача № 15. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = x^x,$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 15. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \operatorname{sh} u \sin v).$$

Задача № 15. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\left(\frac{2^{x^2} + 3^{x^2}}{2^x + 3^x} \right)^{\dfrac{1}{x}}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (красным цветом)и ее разложения (черным цветом) на интервале $x \in [-1, 1]$.

Задача № 15. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad (x - y)^3 + (z - 1)^3 = 1.$$

Задача № 15. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t, \cos t, t)$ и $\vec{b} = (\operatorname{sh} t^2, \operatorname{ch} t^2, 1)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d^3\vec{a}}{dt^3}, \dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 15. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 2B$ и произведения AB и BA.

Задача № 15. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 15. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = \sin 2x.$$

Задача № 15. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 15. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 1, \qquad y'(1) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \sqrt[3]{1 + y^4} = \sqrt{1 + x^4}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № **16**

Задача № 16. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 30 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{3}}}}+\sqrt{1+\sqrt{\pi}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Задача № 16. 2 Рационализировать дробь:

$$\frac{\sqrt[c]{x}+2\sqrt{d}}{\sqrt{c}+\sqrt{x}}.$$

Задача № 16. 3 Решить систему иррациональных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2. \end{cases}$$

Задача № 16. 4 Решить неравенство:

$$(35-x)^{\frac{3}{2}}+(x-9)^{\frac{3}{2}}>\frac{7}{12}(\sqrt{35-x}+\sqrt{x-9})^2.$$

Задача № 16. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 16. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Задача № 16. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

и вычислить ее значение в точке $M(1,-1)$.

Задача № 16. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$$

Задача № 16. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^1 x(2 - x^2)^{12} dx.$$

Задача № 16. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = e^{2x - x^2}$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = (1 + x^2)e^{-x^2},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 16. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} t \cos\phi, \operatorname{ch} t \sin\phi, t^5 + 4\phi),$$

задавая интервал изменения переменной t поочередно $[0, 1]$, $[0, 2]$, $[0, 3]$, $[0, 4]$ и т.д.

Задача № 16. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} - 2}{x}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до восьмой степени. Сравнить на графике поведение функции (черным цветом)и ее разложения (серым цветом) на интервале $x \in [-1, 1]$.

Задача № 16. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2} = 1.$$

Задача № 16. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$ и $\vec{b} = (t, -t^2, t^3)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, $\dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 16. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + B$ и произведения AB и BA.

Задача № 16. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 16. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}(1 + \sin^2 x).$$

Задача № 16. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 16. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$(1 + \ln(x))\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^3 = \operatorname{arctg}(x + 1)$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 2\pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII
ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{17}}$

Задача № 17. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{2}}}}}}.$$

Задача № 17. 2 Представить в виде тригонометрических функций аргумента x выражение:

$$\operatorname{tg}(3x)-\cos(2x)\sin(4x).$$

Задача № 17. 3 Решить логарифмическое уравнение:

$$\lg\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\lg(2x+15)=1.$$

Задача № 17. 4 Решить неравенство:

$$\log_3 x-\log_{\frac{2}{3}} x\leq\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}4.$$

Задача № 17. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 17. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right).$$

Задача № 17. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$$

и вычислить ее значение в точке $M(1,-1)$.

Задача № 17. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Задача № 17. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Задача № 17. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = x + e^{-x}$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x},$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 17. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\sinh t \cos\phi, \sinh t \sin\phi, t^3 + 2\phi),$$

задавая интервал изменения переменной t поочередно $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[0,4]$ и т.д.

Задача № 17. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\left(1 - x + \dfrac{x^2}{2}\right) e^x - \sqrt{1+x^6}}{x^3}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 17. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad e^x + e^y + e^z = 1.$$

Задача № 17. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$ и $\vec{b} = (t, -t^2, t^3)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 17. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $A - 3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 17. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 17. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \operatorname{sh} x.$$

Задача № 17. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 17. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^3 = \operatorname{arctg} x$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 5]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{18}}$

Задача № 18. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 21 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{2^2+\pi^2}}{\sqrt{2}+\log_3 10}.$$

Задача № 18. 2 Представить в виде тригонометрических функций аргумента x выражение:

$$\cos(3x)\sin(2x)-\cos(2x)\sin(3x).$$

Задача № 18. 3 Решить тригонометрическое уравнение:

$$\cos 2x+\sin 2x+\cos x-\sin x=1.$$

Задача № 18. 4 Решить неравенство:

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}.$$

Задача № 18. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 18. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right).$$

Задача № 18. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=x+y+4\sin x\sin y$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,1,)$.

Задача № 18. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\cos^6 x dx.$$

Задача № 18. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,$$

учитывая, что параметр n принимает целые положительные значения.

Задача № 18. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = e^{-2x} \sin^2 x$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = \frac{e^x}{1 + x^2},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 18. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} t \cos\phi, \operatorname{ch} t \sin\phi, \operatorname{sh} tt + \phi),$$

задавая интервал изменения переменной t поочередно $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[0,4]$ и т.д.

Задача № 18. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\sin^3 x - x^3}{x^3 \sin^2 x}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 18. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad (x + y)^2 + z^2 = 1.$$

Задача № 18. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (t^2, -t, 2t)$ и $\vec{b} = (2t, -3t, t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d^2\vec{a}}{dt^2}, \dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 18. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 43B$ и произведения AB и BA.

Задача № 18. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 18. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 + x + 1.$$

Задача № 18. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 18. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}}\frac{d^2y}{dx^2} + (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 20]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{19}}$

Задача № 19. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 21 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{2^2+\pi^2}}{\sqrt{2}+\log_3 10}.$$

Задача № 19. 2 Представить в виде тригонометрических функций аргумента x выражение:

$$\sin(4x) - cos(3x).$$

Задача № 19. 3 Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x} = \sqrt{(6x+1)} - \sqrt{2x+1}.$$

Задача № 19. 4 Решить неравенство:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x-6} \geq 0.$$

Задача № 19. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 19. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 2x}.$$

Задача № 19. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial x}$ функции:

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,1,-1)$.

Задача № 19. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int xe^{-x} \sin x dx.$$

Задача № 19. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2}x^2}{x^2+a^2}dx.$$

и найти его приближенное значение при $a=\pi$.

Задача № 19. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{x^3}{x-a}$$

-синим цветом и

$$\gamma_2 : y = xa\ln x^2,$$

- фиолетовым, придавая параметру a различные значения.

Задача № 19. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma: \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} u\cos v, \operatorname{ch} u\sin v, \operatorname{sh} u).$$

Задача № 19. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$x^2e^{-\sin^2 x}$$

в окрестности точки $x=\pi/2$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x\in[0,\pi]$.

Задача № 19. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma: \quad x^2-y^2+z^2=1.$$

Задача № 19. 14 Даны векторы: $\vec{a}=(t^2,-t,2t)$ и $\vec{b}=(2t,-3t,t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 19. 15 Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $2A-3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 19. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 19. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=\operatorname{tg} x.$$

Задача № 19. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 19. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx} + y^2 = 1$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{20}}$

Задача № 20. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{4^3 + \sin^3(\pi/12)}}{\log_\pi 12}.$$

Задача № 20. 2 Раскрыть скобки в выражении:

$$(x+2)^3(x-4)^2.$$

Задача № 20. 3 Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x} = \sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1}.$$

Задача № 20. 4 Решить неравенство:

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} \le 0.$$

Задача № 20. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 20. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x \to 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$$

Задача № 20. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ функции:

$$f(x,y) = \frac{x + 3y + 6}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

и вычислить ее значение в точке $M(5,1)$.

Задача № 20. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Задача № 20. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx.$$

Задача № 20. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{\ln x^2}{x}$$

-черным цветом и

$$\gamma_2 : y = \sqrt{|x|} \ln x^2,$$

- синим, подбирая параметры графика так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 20. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \operatorname{sh} u).$$

Задача № 20. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$$

в окрестности точки $x = 1$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 20. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^2 + y^2 + 2z - x^3 = 1.$$

Задача № 20. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t, \cos t, t)$ и $\vec{b} = (t^2, -\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 20. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 2B$ и произведения AB и BA.

Задача № 20. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 20. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 2y = \ln x.$$

Задача № 20. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 20. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\left|\frac{dy}{dx}\right| + y^2 = x^2e^{-x}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{21}}$

Задача № 21. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 32 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_{\frac{\pi}{2}} 2}{2^{\frac{1}{3}-\frac{3\pi}{4}}}$$

Задача № 21. 2 Раскрыть скобки в выражении:

$$(x^2 - z^2)(x(x-1) + z(x+1)^2).$$

Задача № 21. 3 Решить систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{4}{xyz} \\ y + z = \dfrac{2}{xyz} \\ z + x = \dfrac{3}{xyz} \end{cases}$$

Задача № 21. 4 Решить неравенство:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 8} > 0.$$

Задача № 21. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 21. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - (1 + x)}{x}.$$

Задача № 21. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ функции:

$$f(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}}$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,1)$.

Задача № 21. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx.$$

Задача № 21. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Задача № 21. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = 3x - x^2$$

-зеленым цветом и

$$\gamma_2 : y = 1 + x^2 - x^4/2,$$

- оранжевым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 21. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \sin u).$$

Задача № 21. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\cos x - e^{-\dfrac{x^2}{2}}}{x^4}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 21. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^3 + y^3 + z^3 = xyz.$$

Задача № 21. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\ln t, \sin t, \operatorname{tg} t)$ и $\vec{b} = (e^t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 21. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + 5B$ и произведения AB и BA.

Задача № 21. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 21. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$-3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4y = \sin x.$$

Задача № 21. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 21. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx}\left|\frac{dy}{dx}\right| + y^2 = e^{-x}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № **22**

Задача № 22. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_2(1+\cos 1/4+\log_{\sqrt{2}}(\sin(4/\pi)))}{(1+\operatorname{tg} 1/3)}.$$

Задача № 22. 2 Привести к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-3}{x-1}.$$

Задача № 22. 3 Решить алгебраическое уравнение:

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{7}{9}\cdot\frac{x+1}{x-1}.$$

Задача № 22. 4 Решить неравенство:

$$\frac{(4x^2-1)(x+2)^2}{x^3(x+1)(x-2)^5}>0.$$

Задача № 22. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 22. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}.$$

Задача № 22. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos{(x-y)}$$

и вычислить ее значение в точке $M(\dfrac{\pi}{2},0)$.

Задача № 22. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Задача № 22. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx.$$

Задача № 22. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$$

-темно-синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2},$$

- красным, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 22. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \sin u).$$

Задача № 22. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

в окрестности точки $x = 1$ по степеням x до седьмой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 22. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^3 - y^3 + 2z = 1.$$

Задача № 22. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, t^3)$ и $\vec{b} = (t, -t^2, \sin t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 22. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $A - 4B$ и произведения AB и BA.

Задача № 22. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 22. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 + x + 1.$$

Задача № 22. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 22. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \ln(1+x)\frac{dy}{dx}\left|\frac{dy}{dx}\right| + y^2 = \sin x$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{23}}$

Задача № 23. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 32 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{\sin^2(\pi^2)+2}+\sqrt{\pi^2+4}}{e^2+e^3}.$$

Задача № 23. 2 Привести подобные члены в выражении:

$$a(\cos^3 x - bx)^2 - (c + d\cos x)(\sin x - 1)^2 + 2\sin x$$

по степеням $\cos x$ и $\sin x$.

Задача № 23. 3 Решить алгебраическое уравнение:

$$\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0.$$

Задача № 23. 4 Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1} \geq 0.$$

Задача № 23. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n + 1}{n!}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 23. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Задача № 23. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ функции:

$$f(x,y) = \ln(1 - \sqrt{x^2+y^2})$$

и вычислить ее значение в точке $M(-1,-1)$.

Задача № 23. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

Задача № 23. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Задача № 23. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \arccos^3 \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = \sin(x+2)^{\frac{1}{x}},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 23. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \sin u).$$

Задача № 23. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{3^{x^2}-2^{x^2}}{\left(3^x-2^x\right)^2}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (красным цветом)и ее разложения (черным цветом) на интервале $x \in [-1, 1]$.

Задача № 23. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^{5/2} + y^{5/2} + z^{5/2} = 1.$$

Задача № 23. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\log_2 t, \log_4 t, \operatorname{tg} t)$ и $\vec{b} = (t, t^2, 1-t^2)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, $\dfrac{d^3\vec{b}}{dt^3}$.

Задача № 23. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A+3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 23. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 23. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}(1+x).$$

Задача № 23. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 23. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+x^2}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{24}}$

Задача № 24. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 29 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_3(\sin^2(\pi^2)+1)+\log_4(\pi^2+1)}{\log_2(1+\sqrt{\pi^2+2^3})}.$$

Задача № 24. 2 Привести подобные члены в выражении:

$$a(x-y)^3+3b(x+y)^2-4+2(x+y^2)$$

по степеням x и y.

Задача № 24. 3 Решить тригонометрическое уравнение:

$$\arcsin 2x = 3\arcsin x.$$

Задача № 24. 4 Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x}<1.$$

Задача № 24. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 24. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}.$$

Задача № 24. 7 Найти производную $y^{(10)}$ функции

$$y=\sqrt{x}$$

и вычислить ее значение при $x=1$.

Задача № 24. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx.$$

Задача № 24. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx.$$

Задача № 24. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{\lg_3 1 + x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \pi^{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2-1},$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 24. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \sin \pi u).$$

Задача № 24. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 24. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad xe^{x^2} + ye^{y^2} + ze^{z^2} = 1.$$

Задача № 24. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$ и $\vec{b} = (t, -t^2, t^3)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d^3\vec{a}}{dt^3}, \dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 24. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - B$ и произведения AB и BA.

Задача № 24. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 24. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$24\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = e^{x/2}(\sin x + \cos x + 1).$$

Задача № 24. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 24. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + \cos^2 y = \sin(1 + x^2)$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 20]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{25}}$

Задача № 25. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 32 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{e^{-\sin(\pi^2)}\log_5 \sin\left(\dfrac{1}{\pi^2+1}\right)}{1+\sqrt{\pi^3}}.$$

Задача № 25. 2 Раскрыть скобки в выражении:

$$(x^2-z^2)(x(x-1)+z(x+1)^2).$$

Задача № 25. 3 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Задача № 25. 4 Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2+4x+4}<x+6..$$

Задача № 25. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x)^n}{n}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 25. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Задача № 25. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial x}$ функции:

$$f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,\dfrac{\pi}{4},\pi)$.

Задача № 25. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x^5 \sin 5x dx.$$

Задача № 25. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx.$$

Задача № 25. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = (x+2)^{\frac{1}{x}},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 25. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos t\cos\phi, \cos t\sin\phi, \sin t\sin\phi),$$

задавая интервал изменения переменной t поочередно $[0, \pi/2]$, $[0, \pi]$, $[0, 3\pi/2]$, $[0, 2\pi]$ и т.д.

Задача № 25. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до восьмой степени. Сравнить на графике поведение функции (черным цветом)и ее разложения (серым цветом) на интервале $x \in [-1, 1]$.

Задача № 25. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^3\sin x^2 + y^3\sin y^2 + z^3\sin z^2 = 1.$$

Задача № 25. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\ln t, \sin t, \operatorname{tg} t)$ и $\vec{b} = (e^t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d^2\vec{a}}{dt^2}, \dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 25. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + 3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 25. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 25. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x(\sin x + \cos x).$$

Задача № 25. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 25. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$(1+x)^3\frac{d^2y}{dx^2} + (1+x^2)^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \sqrt[3]{1+y^2} = \frac{1}{2+\sin(x)}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 20]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{26}}$

Задача № 26. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_2(1+\cos 1/4+\log_{\sqrt{2}}(\sin(4/\pi)))}{(1+\operatorname{tg} 1/3)}.$$

Задача № 26. 2 Привести к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-3}{x-1}.$$

Задача № 26. 3 Решить систему иррациональных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \\ x-2y+1=0. \end{cases}$$

Задача № 26. 4 Решить неравенство:

$$2-\log_2 x^2+3x>0.$$

Задача № 26. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 26. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Задача № 26. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$$

и вычислить ее значение в точке $M(1,-1)$.

Задача № 26. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx.$$

Задача № 26. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$$

Задача № 26. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

- черным цветом и

$$\gamma_2 : y = \sin x \cdot \sin 3x,$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 26. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos^3 t \cos^3 \phi, \cos t \sin \phi, t^5 + 4\phi).$$

Задача № 26. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$x^2 e^{-\sin^2 x}$$

в окрестности точки $x = \pi/2$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 26. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad xe^{x^2} + ye^{y^2} + ze^{z^2} = 1.$$

Задача № 26. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t, \cos t, t)$ и $\vec{b} = (t^2, -\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 26. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + 5B$ и произведения AB и BA.

Задача № 26. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 26. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x(\sin x + \cos x).$$

Задача № 26. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 26. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx} + y^2 = 1$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{27}}$

Задача № 27. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 21 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{2^2+\pi^2}}{\sqrt{2}+\log_3 10}.$$

Задача № 27. 2 Привести к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x+3}-\frac{x^2}{x}.$$

Задача № 27. 3 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^4+4\log_3 y=2 \\ y^{x^4}=\sqrt[4]{3}. \end{cases}$$

Задача № 27. 4 Решить неравенство:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x-6}\geq 0.$$

Задача № 27. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 27. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$$

Задача № 27. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$$

и вычислить ее значение в точке $M(2,1,)$.

Задача № 27. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

Задача № 27. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2}x^2}{x^2+a^2}dx.$$

и найти его приближенное значение при $a = \pi$.

Задача № 27. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = e^{2x - x^2}$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = (1 + x^2)e^{-x^2},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 27. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \sin u).$$

Задача № 27. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 27. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^3 + y^3 + z^3 = xyz.$$

Задача № 27. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\ln t, \sin t, \operatorname{tg} t)$ и $\vec{b} = (e^t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d^2\vec{a}}{dt^2}$, $\dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 27. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $A - 3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 27. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 27. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{-x}(1 + \sin x).$$

Задача № 27. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 27. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx} + y^2 = 1$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{28}$

Задача № 28. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 21 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{2^2+\pi^2}}{\sqrt{2}+\log_3 10}.$$

Задача № 28. 2 Привести подобные члены в выражении:

$$a(x-1)^3+3bx^2-4+2x$$

по степеням x.

Задача № 28. 3 Решить логарифмическое уравнение:

$$7\sqrt{\lg x}+2\lg x-9=0.$$

Задача № 28. 4 Решить неравенство:

$$\frac{5}{3-2x-x^2}<1.$$

Задача № 28. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 28. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Задача № 28. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}}$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,1)$.

Задача № 28. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Задача № 28. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_1^0 (x\ln x)^2 dx.$$

Задача № 28. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = x^{\frac{1}{x}}$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = 1 + x^{\frac{1}{x}},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 28. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \sin u).$$

Задача № 28. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\operatorname{ch} x - e^{\operatorname{ch} x - 1)}}{x^4}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 28. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad \sin x + \sin y + \sin z = 1.$$

Задача № 28. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\log_2 t, \log_4 t, \operatorname{tg} t)$ и $\vec{b} = (t, t^2, 1-t^2)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d^3\vec{b}}{dt^3}$.

Задача № 28. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + 3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 28. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 28. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = \sin 2x.$$

Задача № 28. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 28. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{1}{2}(1 + x^3)\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^3 = \ln(1 + x^2)$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{29}}$

Задача № 29. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{4^3+\sin^3(\pi/12)}}{\log_\pi 12}.$$

Задача № 29. 2 Рационализировать дробь:

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}.$$

Задача № 29. 3 Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x}=\sqrt{(6x+1)}-\sqrt{2x+1}.$$

Задача № 29. 4 Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2+4x+4}<x+6..$$

Задача № 29. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 29. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}.$$

Задача № 29. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial x}$ функции:

$$f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$$

и вычислить ее значение в точке $M(0,1,-1)$.

Задача № 29. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int(2^x+3^x)^2dx.$$

Задача № 29. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx.$$

Задача № 29. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \sin x + \cos^2 x$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 29. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos t \cos \phi, \cos t \sin \phi, t^5 + 4\phi).$$

Задача № 29. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (черным цветом)и ее разложения (серым цветом) на интервале $x \in [-1, 1]$.

Задача № 29. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2} = 1.$$

Задача № 29. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t, \cos t, t)$ и $\vec{b} = (t^2, -\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$.

Задача № 29. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $1/2A - 3/2B$ и произведения AB и BA.

Задача № 29. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 29. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x + \cos x + 1.$$

Задача № 29. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 29. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \ln(1+x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = \cos(x)^2$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{30}}$

Задача № 30. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 32 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_{\frac{\pi}{2}} 2}{2^{\frac{1}{3}-\frac{3\pi}{4}}}$$

Задача № 30. 2 Представить в виде тригонометрических функций аргумента x выражение:

$$\sin(4x) - cos(3x).$$

Задача № 30. 3 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z+x} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Задача № 30. 4 Решить неравенство:

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} \leq 0.$$

Задача № 30. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 30. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - (1 + x)}{x}.$$

Задача № 30. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ функции:

$$f(x, y) = \frac{x + 3y + 6}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

и вычислить ее значение в точке $M(5, 1)$.

Задача № 30. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx.$$

Задача № 30. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Задача № 30. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{x^3}{x-a}$$

-синим цветом и

$$\gamma_2 : y = xa\ln x^2,$$

- фиолетовым, придавая параметру a различные значения.

Задача № 30. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, \operatorname{sh} u\sin v).$$

Задача № 30. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\sin^3 x - x^3}{x^3\sin^2 x}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача № 30. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^2 - y^2 + z^2 = 1.$$

Задача № 30. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$ и $\vec{b} = (t, -t^2, t^3)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 30. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $2A - 3B$ и произведения AB и BA.

Задача № 30. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 30. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$-3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4y = \sin x.$$

Задача № 30. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 30. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x\frac{dy}{dx} + y^2 = 1$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{31}}$

Задача № 31. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 21 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{2^2+\pi^2}}{\sqrt{2}+\log_3 10}.$$

Задача № 31. 2 Раскрыть скобки в выражении:

$$(x+2)^3(x-4)^2.$$

Задача № 31. 3 Решить алгебраическое уравнение:

$$\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0.$$

Задача № 31. 4 Решить неравенство:

$$x^4-5x^2+4<0.$$

Задача № 31. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 31. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}.$$

Задача № 31. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos{(x-y)}$$

и вычислить ее значение в точке $M(\dfrac{\pi}{2},0)$.

Задача № 31. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int xe^{-x}\sin x dx.$$

Задача № 31. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx.$$

Задача № 31. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

- синим цветом и

$$\gamma_2 : y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 31. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} u\cos v, \operatorname{ch} u\sin v, \operatorname{sh} u).$$

Задача № 31. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$x^2e^{-\sin^2 x}$$

в окрестности точки $x = \pi/2$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 31. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^2+y^2+2z-x^3 = 1.$$

Задача № 31. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (t^2, -t, 2t)$ и $\vec{b} = (2t, -3t, t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 31. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 43B$ и произведения AB и BA.

Задача № 31. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 31. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2+x+1.$$

Задача № 31. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 31. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \ln(1+x)\frac{dy}{dx}\left|\frac{dy}{dx}\right| + y^2 = \sin x$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{32}}$

Задача № 32. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_2(1+\cos\dfrac{1}{4}+\log_{\sqrt{2}}(\sin(4/\pi)))}{(1+\operatorname{tg}1/3)}.$$

Задача № 32. 2 Раскрыть скобки в выражении:

$$(x^2-z^2)(x(x-1)+z(x+1)^2).$$

Задача № 32. 3 Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x}=\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}.$$

Задача № 32. 4 Решить неравенство:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}>0.$$

Задача № 32. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 32. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

Задача № 32. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial x}$ функции:

$$f(x,y,z)=xy^2z^3(12-x-2y-3z)$$

и вычислить ее значение в точке $M(2,1,1)$.

Задача № 32. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x^5\sin 5x dx.$$

Задача № 32. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^{\pi}(x\sin x)^2dx.$$

Задача № 32. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \frac{\ln x^2}{x}$$

-черным цветом и

$$\gamma_2 : y = \sqrt{|x|}\ln x^2,$$

- синим, подбирая параметры графика так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 32. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями (геликоид):

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (t\cos\phi, t\sin\phi, \phi u).$$

Задача № 32. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\cos x - e^{-\dfrac{x^2}{2}}}{x^4}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 32. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad (x+y)^2 + z^2 = 1.$$

Задача № 32. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, t^3)$ и $\vec{b} = (t, -t^2, \sin t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 32. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 2B$ и произведения AB и BA.

Задача № 32. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 32. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \operatorname{tg} x.$$

Задача № 32. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 32. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx}\left|\frac{dy}{dx}\right| + y^2 = e^{-x}$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{33}}$

Задача № 33. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 30 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{3}}}}+\sqrt{1+\sqrt{\pi}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Задача № 33. 2 Рационализировать дробь:

$$\frac{\sqrt[c]{x}+2\sqrt{d}}{\sqrt{c}+\sqrt{x}}.$$

Задача № 33. 3 Решить систему иррациональных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2. \end{cases}$$

Задача № 33. 4 Решить неравенство:

$$(35-x)^{\dfrac{3}{2}}+(x-9)^{\dfrac{3}{2}}>\frac{7}{12}(\sqrt{35-x}+\sqrt{x-9})^2.$$

Задача № 33. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 33. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Задача № 33. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

и вычислить ее значение в точке $M(1,-1)$.

Задача № 33. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$$

Задача № 33. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^1 x(2 - x^2)^{12} dx.$$

Задача № 33. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = e^{2x - x^2}$$

- красным цветом и

$$\gamma_2 : y = (1 + x^2)e^{-x^2},$$

- серым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 33. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\operatorname{ch} t \cos\phi, \operatorname{ch} t \sin\phi, t^5 + 4\phi),$$

задавая интервал изменения переменной t поочередно $[0, 1]$, $[0, 2]$, $[0, 3]$, $[0, 4]$ и т.д.

Задача № 33. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} - 2}{x}$$

в окрестности точки $x = 0$ по степеням x до восьмой степени. Сравнить на графике поведение функции (черным цветом)и ее разложения (серым цветом) на интервале $x \in [-1, 1]$.

Задача № 33. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2} = 1.$$

Задача № 33. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$ и $\vec{b} = (t, -t^2, t^3)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, $\dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 33. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + B$ и произведения AB и BA.

Задача № 33. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 33. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}(1 + \sin^2 x).$$

Задача № 33. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 33. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$(1 + \ln(x))\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^3 = \mathrm{arctg}(x + 1)$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 2\pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{34}}$

Задача № 34. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 24 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\log_2(1+\cos 1/4+\log_{\sqrt{2}}(\sin(4/\pi)))}{(1+\operatorname{tg} 1/3)}.$$

Задача № 34. 2 Привести к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-3}{x-1}.$$

Задача № 34. 3 Решить систему иррациональных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \\ x-2y+1=0. \end{cases}$$

Задача № 34. 4 Решить неравенство:

$$2-\log_2 x^2+3x>0.$$

Задача № 34. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 34. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Задача № 34. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ функции:

$$f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$$

и вычислить ее значение в точке $M(1,-1)$.

Задача № 34. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx.$$

Задача № 34. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

Задача № 34. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

- черным цветом и

$$\gamma_2 : y = \sin x \cdot \sin 3x,$$

- зеленым, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 34. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (\cos^3 t \cos^3 \phi, \cos t \sin \phi, t^5 + 4\phi).$$

Задача № 34. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$x^2 e^{-\sin^2 x}$$

в окрестности точки $x = \pi/2$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 34. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad xe^{x^2} + ye^{y^2} + ze^{z^2} = 1.$$

Задача № 34. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t, \cos t, t)$ и $\vec{b} = (t^2, -\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 34. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $-2A + 5B$ и произведения AB и BA.

Задача № 34. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 34. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x(\sin x + \cos x).$$

Задача № 34. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 34. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx} + y^2 = 1$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и математического моделирования

СЕМЕСТР IV-VII

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № $\boxed{\mathbf{35}}$

Задача № 35. 1 Найти точное и вычислить приближенное (с 21 значащими цифрами) значения выражения:

$$\frac{\sqrt{2^2+\pi^2}}{\sqrt{2}+\log_3 10}.$$

Задача № 35. 2 Привести к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x+3}-\frac{x^2}{x}.$$

Задача № 35. 3 Решить систему иррациональных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \\ x-2y+1=0. \end{cases}$$

Задача № 35. 4 Решить неравенство:

$$3-\frac{2x-17}{x-5}>\frac{x-5}{x+2}.$$

Задача № 35. 5 Вычислить сумму:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$$

и найти ее приближенное значение.

Задача № 35. 6 Найти значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

Задача № 35. 7 Найти производную $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial x}$ функции:

$$f(x,y,z)=xy^2z^3(12-x-2y-3z)$$

и вычислить ее значение в точке $M(2,1,1)$.

Задача № 35. 8 Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Задача № 35. 9 Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}dx.$$

Задача № 35. 10 На одном рисунке построить графики двух кривых, γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 : y = \sqrt{8x^2 - x4}$$

-темно-синим цветом и

$$\gamma_2 : y = -\sqrt{8x^2 - x4},$$

- красным, подбирая пределы изменения переменных так, чтобы добиться его большей наглядности.

Задача № 35. 11 Построить график поверхности, заданной параметрическими уравнениями (геликоид):

$$\Sigma : \quad \vec{r} = (t\cos\phi, t\sin\phi, \phi u).$$

Задача № 35. 12 Разложить в ряд Тейлора функцию

$$(1 - x^2)e^{1 - \cos^2 x}$$

в окрестности точки $x = 1$ по степеням x до шестой степени. Сравнить на графике поведение функции (зеленым цветом)и ее разложения (синим цветом) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Задача № 35. 13 Построить график поверхности, заданной неявным уравнением:

$$\Sigma : \quad xyz = 1.$$

Задача № 35. 14 Даны векторы: $\vec{a} = (\sin t^2, t^3, 1)$ и $\vec{b} = (1, 3t^2, \sin t)$. Вычислить скалярное и векторное произведения их производных: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}, \dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Задача № 35. 15 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти их ранги, определители, вычислить их линейную комбинацию: $3A - 43B$ и произведения AB и BA.

Задача № 35. 16 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A из предыдущего примера.

Задача № 35. 17 Найти в квадратурах общее решение обыкновенного линейного дифференциального 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^x(x^2 - x + 2).$$

Задача № 35. 18 Решить задачу Коши

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

для предыдущего дифференциального уравнения и построить график решения на отрезке $x \in [0, \pi]$.

Задача № 35. 19 Найти численное решение задачи Коши

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \ln(1+x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = \cos(x)^2$$

и построить график решения на отрезке $x \in [0, 10]$.

Стандартное задание по LaTeX

Подготовить в пакете LaTeX2ϵ следующий текст[1]:

Начиная ИМЕННО с этого места следует задание в LaTeX2ϵ !!!

Исследуем дифференциальное уравнение[2]вида (VIII.1):

$$\frac{d^3y(x)}{dx^3} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\frac{d^2y(x)}{dx^2} + a^{y(x)}\sum_{i=1}^{\infty} \overset{i}{\underset{j}{\mathcal{H}}}(x) = \mathcal{G}_{jh}(x). \tag{VIII.1}$$

Результаты численного интегрирования приведены в Таблице Табл.18:

Таблица.18. Результаты численного интегрирования коэффициентов уравнения Леви-Шауката (VIII.1)

Коэффициент	переменная	операнда	итоговое ψ-поле	$\mathcal{SH}$-единица
G_{11}	x	1.012	ψ=4.52	3.142
G_{12}	x_{ih}	1.00132	Ψ_k=0.3821	2.87
G_{22}	x_{kL}	-1.0627	Θ_g=-0.5439	3.12

Уравнение (VIII.1) впервые было замечено Леви-Шаукатом при разглядывании им книги Егорова [1] на фоне цветущих огурцов, а коэффициенты уравнения (VIII.2) были тщательно вычислены в работе [2] известными в некоторых кругах учеными.

В уравнении (VIII.1) $\overset{i}{\underset{j}{\mathcal{H}}}(x)$ - **фундаментальная последовательность операторов первичного распознавания образов матричного представления (VIII.2)** $\mathcal{G}_{ij}$, **а** $y(x)$ **- неизвестный объект,** который описывается матричным уравнением:

$$\mathcal{G}_{ij} = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{G}_{ii} & = & \Delta_i^i; \\ \mathcal{G}_{ij} & = & \delta_j^i; \\ \mathcal{G}_{ji} & = & \delta_i^j. \end{array} \right. . \tag{VIII.2}$$

[1] Обратите внимание и на нумерацию уравнений, таблиц и страниц!!!

[2] Дифференциальным уравнением называется всякое уравнение вида $F(y, y', y'', \dots y^n) = 0$, где $y^i(x)$ — i- тые производные функции $y(x)$.

Угол x, входящий в качестве переменной интегрирования уравнения (VIII.1), является углом между желаемым и возможным ψ-полями и определяется из интегрального уравнения (VIII.3):

$$\Theta(x) = \iiint\limits_{\Omega} e^{\mathcal{H}_i(uvxy)} \mathcal{F}_j(u - vy) du dv dy. \tag{VIII.3}$$

Подставляя вместо ds его выражение и вводя явно переменную интегрирования t, получим окончательно

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt. \tag{VIII.4}$$

Зная внутреннее уравнение кривой, мы должны выразить u и v через t в выражениях E, F, G, найти производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, подставить все это в подынтегральную функцию VIII.4 и задача сведется к вычислению интеграла, вида

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Сопоставим упорядоченной системе векторов $\{\vec{e'}_i\}_n$ - *матрицу-строку*[3] :

$$[\vec{e}'] = [\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, , \ldots, \vec{e'}_n], \tag{VIII.5}$$

аналогично -

$$[\vec{e}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n], \tag{VIII.6}$$

а координатам каждого вектора $\vec{e'}_k$ в базисе $\{\vec{e}_i\}_n$ - *матрицу-столбец*:

$$[\vec{e'}_k] = \begin{bmatrix} C'^k_1 \\ C'^k_2 \\ \ldots \\ C'^k_n \end{bmatrix} \tag{VIII.7}$$

и скомпонуем из этих столбцов квадратную матрицу:

$$C = \begin{bmatrix} C'^1_1 & C'^1_2 & \ldots & C'^1_n \\ C'^2_1 & C'^2_2 & \ldots & C'^2_n \\ . & . & \ldots & . \\ C'^n_1 & C'^n_2 & \ldots & C'^n_n \end{bmatrix}, \tag{VIII.8}$$

в которой номер столбца соответствует номеру вектора $\vec{e'}_k$, а номер строки — номеру координаты этого вектора.

Теорема *Система векторов $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ с координатами C'^i_k (согласно (VIII.5)) образует базис V_n тогда и только тогда, если:*

$$\det C \neq 0. \tag{VIII.9}$$

[3]Под матрицей здесь и в дальнейшем будем подразумевать прямоугольную таблицу “шириной” n (число столбцов) и “высотой” m (число строк)

В этом случае матрица C называется матрицей перехода от старого базиса $\{\vec{e}_i\}_n$ к новому $\{\vec{e'}_k\}_n$.

Таким образом, согласно (VIII.9) матрица перехода является невырожденной квадратной матрицей.

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1}, \tag{VIII.10}$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}, \tag{VIII.11}$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}, \tag{VIII.12}$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 q_{k-4}, \tag{VIII.13}$$

Мы рассмотрели следующие частные случаи движений пространства $\mathcal{E}_3$: Подробнее о движении в пространстве смотрите в работе [2].

Классификация движений $\mathcal{E}_3$

Движения I рода	Движения II рода
перенос	симметрия относительно плоскости
поворот	поворотное отражение
винтовое движение	скользящее отражение

Заметим еще, что тождественное преобразование пространства можно считать как частным случаем переноса (вектор переноса — нулевой), так и частным случаем поворота (угол поворота $\varphi = 0$).

Решаем систему линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{2}}x^1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x^2 = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{3\sqrt{2}}x^1 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}x^2 + \dfrac{4}{3\sqrt{2}}x^3 = 0 \\[2ex] -\dfrac{2}{3\sqrt{10}}x^1 - \dfrac{2}{3\sqrt{10}}x^2 + \dfrac{1}{3\sqrt{10}}x^3 - \dfrac{9}{3\sqrt{10}}x^4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^1 = -2c_1 \\ x^2 = -2c_1 \\ x^3 = x^4 = c_1 \\ x^5 = c_2. \end{array}\right.$$

Векторы нормальной фундаментальной системы решений имеют вид [1]

$$x_1 = -2\vec{i}_1 - 2\vec{i}_2 + \vec{i}_3 + \vec{i}_4\,,\ x_2 = \vec{i}_5\,.$$

Поэтому

$$\vec{}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2\vec{i}_1 - 2\vec{i}_2 + \vec{i}_3 + \vec{i}_4), \quad \vec{h}_2 = \vec{i}_5\,.$$

Ортогональная матрица перехода от базиса $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_5\}$ к базису $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{VIII.14}$$

Литература

1 Егоров А.М. Влияние ψ-поля на рост огурцов в долинах Татарстана // Васильево: Изд-во «Васюки»". – 2003. – 1001 с..

2 Абдулханов Р.Р. Решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Леви-Шауката в педагогической поэме Макаренко // Агрыз: Изд-во «Пульс Мысли». – 1998.– 15 с.

Кончая ИМЕННО этим местом задание LaTeX2ϵ кончается !!!

Литература

[1] Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина. Математическое моделирование в СКМ как основа развития математического образования// IV-й Международный семинар по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZKAS-2014. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZKAS-2014. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. - с. 95-110.

[2] Адиятуллина Г.Р., Игнатьев Ю.Г. Взаимодействие маплетов с базами данных в форматах txt и xsl в аналитической системе тестирования. Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета, 2011, 3(25).- С. 21-25.

[3] Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А. Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект.– Гродно: Изд–во Гродненского госуниверситета, 2011, 518 с.

[4] Buteau, C., Jarvis, D. H., Lavicza, Z. On the Integration of Computer Algebra Systems (CAS) by Canadian Mathematicians: Results of a National Survey. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 14:1, 35-57

[5] Бушкова В.А. Библиотека программных процедур создания управляемой оснащенной динамической визуализации геодезических линий в СКМ Maple // Вестник ТГГПУ, 2011. №4(26). С. 8–10.

[6] Бушкова О.А. Design of the Computer Geometry Resource in «Mathematica» Environment. Open Educartion. №6, С.18-22.

[7] Дьяконов В.П. Компьютерная математика // Соровский образовательный журнал. 2001. № 1. С. 116–121.

[8] Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. Москва, Солон-Пресс. 2006. 720 с.

[9] Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: Учебник для вузов / Д.П. Голоскоков. — Спб: Питер, 2004. — 539 с.

[10] Проблемы информационных технологий в математическом образовании: Учебное пособие под редакцией Ю.Г. Игнатьева. Казань: ТГППУ, 2005. 118 с.

[11] Игнатьев Ю.Г. Пользовательские графические процедуры для создания анимационных моделей нелинейных физических процессов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. Смоленск: СмолГУ, 2009. Вып. 10. С. 43–44.

[12] Игнатьев Ю.Г., Абдулла Х.Х. Комплекс программ для математического моделирования нелинейных электродинамических систем в системе компьютерной математики Maple // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика», 2010. № 4. С. 65–76.

[13] Игнатьев Ю.Г., Абдулла Х.Х. Математическое моделирование нелинейных обобщенно - механических систем в системе компьютерной математики Maple // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2010. **№**2 (14). С. 67 – 77.

[14] Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Библиотека программных процедур для методического обеспечения курса высшей алгебры в системе компьютерной математики «Maple // Вестник ТГГПУ, 2011.№1(23). С. 20 – 24.

[15] Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программное обеспечение теории кривых второго порядка в пакете компьютерной математики // Вестник ТГГПУ, 2011. №4(26). С. 24–29.

[16] Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программа точного вычисления фундаментальных решений системы линейных алгебраических уравнений произвольного порядка и представления их в стандартном, списочном виде в математическом пакете Maple // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ РФ №2011614976. 2011. Бюл.: RU ОБПБТ, № 3(76). С. 547.

[17] Игнатьев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию, Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с.

[18] Капустина Т. В. Компьютерная система Mathematica 3.0 в вузовском образовании / Т. В. Капустина. – М.: МПУ, 2000. – 240 с.

[19] Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики: Учебное пособие. СПб.: Изд-во «Лань», 2012.— 512 с.

[20] Корнилов В.С. Modern information and communication technologies in humanitarian studies mathematical models of inverse problems for differential equations. Vestnik PFUR: Informatization of Education. 2007. № 1. С. 64-98.

[21] Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — СПБ.: БХВ-Петербург, 2001. - С. 528.

[22] Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2005. 320 с.

[23] В.Н. Говорухин, В. Г. Цибулин *Введение в Maple. Математический пакет для всех.* -Москва: Мир, 1997.

[24] А. Матросов *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики.* Изд-во "БХВ-Петербург", Санкт-Петербург, 2001.

[25] В. Дьяконов *Maple 7. Учебный курс.* Издательский дом "Питер", Санкт-Петербург, 2002.

[26] В. Дьяконов Mathematica 4. Учебный курс. Издательский дом “Питер”, Санкт-Петербург, 2001.

[27] Р. В. Загретдинов, Ф. М. Аблаев, Т. М. Гаврилова, С. Н. Перфилов: *Издательская система LaTeX* . - Казань, 1994.

[28] С. Львовский: *TEX* - Москва, 1996.

[29] М.Гуссенс, Ф.Миттельбах, А.Самарин: *Путеводитель по LaTeX* . Издательство “Мир”, 1999.

[30] Игорь Котельников, Платон Чеботаев: *LaTeX 2ε по-русски.* - Сибирский хронограф, Новосибирск, 2004.

[31] А.Н.Васильев: *Самоучитель Maple 8.* “Диалектика”, Москва, 2003.

[32] Д.П.Голосков. *Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple.* Питер СПб, 2004

[33] Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. // Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7 $\underline{http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf >}$